

Intégrales de Wallis

1. Introduction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$$

W_n est la n^{e} intégrale de Wallis. Faisons deux remarques. Tout d'abord, $W_n > 0$. En effet,

$$W_n \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \geq \sin^n \frac{\pi}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}^n} > 0$$

Remarquons aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x (\sin x - 1) \, dx$$

La fonction $x \mapsto \sin^n x (\sin x - 1)$ est négative sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On en déduit que $W_{n+1} - W_n \leq 0$. Ainsi, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

2. Une relation de récurrence

Soit $n \geq 2$. Écrivons

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \sin x \, dx$$

Intégrons par parties en posant $u = \sin^{n-1} x$ et $v' = \sin x$, de sorte que $u' = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x$ et $v = -\cos x$.

$$\begin{aligned} W_n &= -[\cos x \sin^{n-1} x]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (n-1) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \right) \\ &= (n-1)(W_{n-2} - W_n) \end{aligned}$$

On en déduit

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

3. La valeur de W_{2p}

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a la « cascade »

$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} W_{2p-2} \\ W_{2p-2} &= \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4} \\ \dots &\dots \\ W_2 &= \frac{1}{2} W_0 \end{aligned}$$

En combinant, il vient

$$W_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\dots 1}{(2p)(2p-2)\dots 2} W_0$$

Multiplions et divisons par $(2p)(2p-2)\dots 2$ pour obtenir

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{((2p)(2p-2)\dots 2)^2} W_0$$

Remarquons que

$$((2p)(2p-2)\dots 2)^2 = (2^p p!)^2$$

et que

$$W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

pour en déduire

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2}$$

4. La valeur de W_{2p+1}

Soit $p \in \mathbb{N}$. Procédons comme dans le paragraphe précédent. Cascadons.

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} W_{2p-1} \\ W_{2p-1} &= \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} \\ \dots &\dots \\ W_3 &= \frac{2}{3} W_1 \end{aligned}$$

Puis combinons.

$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{(2p)(2p-2)\dots 2}{(2p+1)(2p-1)\dots 3} W_1 \\ &= \frac{((2p)(2p-2)\dots 2)^2}{(2p+1)!} W_1 \\ &= \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!} W_1 \end{aligned}$$

Comme $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$, on obtient finalement

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}$$

5. Produits d'intégrales de Wallis

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = nW_n W_{n+1}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} U_{2p} &= 2pW_{2p}W_{2p+1} \\ &= 2p \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2} \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!} \\ &= \frac{2p}{2p+1} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} U_{2p+1} &= (2p+1)W_{2p+1}W_{2p+2} \\ &= (2p+1) \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!} \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2} (p+1)!^2} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Les deux suites $(U_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(U_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ convergent vers $\frac{\pi}{2}$. Par la réciproque du théorème des suites extraites,

$$U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

6. Un équivalent de W_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{n+1} W_n \leq \frac{n}{n+1} W_{n-1} = W_{n+1} \leq W_n$$

Les deux inégalités proviennent de la décroissance de la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$. L'égalité résulte de la relation de récurrence vue au paragraphe 2. En divisant par W_n qui est strictement positif, il vient

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Ainsi,

$$W_n \sim W_{n+1}$$

De là,

$$nW_n^2 \sim nW_nW_{n+1} \sim \frac{\pi}{2}$$

et donc

$$W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

En passant à la racine carrée,

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

En corollaire immédiat, W_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Le tableau ci-dessous donne W_n , $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et le quotient de ces deux nombres pour quelques valeurs de n .

n	W_n	$\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$	$W_n \sqrt{2n/\pi}$
0	1.57079632	—	—
1	1.00000000	1.25331414	0.79788456
2	0.78539816	0.88622693	0.88622693
3	0.66666667	0.72360125	0.92131773
4	0.58904862	0.62665707	0.93998560
5	0.53333333	0.56049912	0.95153286
6	0.49087385	0.51166335	0.95936879
7	0.45714286	0.47370822	0.96503046
8	0.42951462	0.44311346	0.96931070
9	0.40634921	0.41777138	0.97265927
10	0.38656316	0.39633273	0.97535008
11	0.36940837	0.37788843	0.97755935
12	0.35434956	0.36180063	0.97940560
13	0.34099234	0.34760680	0.98097144
14	0.32903888	0.33496229	0.98231618
15	0.31825952	0.32360432	0.98348353
16	0.30847395	0.31332853	0.98450641
17	0.29953837	0.30397333	0.98541004
18	0.29133651	0.29540898	0.98621414
19	0.28377319	0.28752998	0.98693427
20	0.27676968	0.28024956	0.98758293
10^2	0.12501848	0.12533141	0.99750316
10^3	0.03962337	0.03963327	0.99975003
10^4	0.01253283	0.01253314	0.99997500
10^5	0.00396332	0.00396333	0.99999750