

$$a^b = b^a$$

Marc Lorenzi

18 décembre 2024

Considérons l'égalité

$$(E) \ a^b = b^a$$

où $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Remarquons que tous les couples (a, a) vérifient (E) . Également, si (a, b) vérifie (E) alors (b, a) aussi. Nous pouvons donc nous restreindre aux couples (a, b) tels que $a > b$.

Lemme 1. *Soit $b \in \mathbb{N}$ tel que $b \geq 2$. Pour tout $n \geq 2$, $b^n \geq n + 2$.*

Démonstration. Récurrence, ou alors Newton. $\square$

Proposition 2. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$. On a $a^b = b^a$ si et seulement si $a = 4$ et $b = 2$.*

Démonstration. Évidemment, $2^4 = 4^2$. Inversement, supposons $a^b = b^a$. Comme $a^0 = 1$ alors que $0^a = 0$, on a en fait $a > b \geq 1$. Mieux, $a^1 = a$ alors que $1^a = 1$, donc $a > b \geq 2$.

Notons $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ et écrivons $a = \delta\alpha$, $b = \delta\beta$ où $\alpha \wedge \beta = 1$. L'égalité (E) s'écrit

$$\delta^b \alpha^b = \delta^a \beta^a$$

ou encore

$$\alpha^b = \delta^{a-b} \beta^a$$

Ainsi, β divise α^b . Or, β est premier avec α^b , donc $\beta = 1$. On a donc $b = \delta$, d'où $a = b\alpha$. L'égalité (E) devient

$$b^b \alpha^b = b^{b\alpha}$$

ou encore

$$\alpha^b = (b^{\alpha-1})^b$$

Ainsi,

$$\alpha = b^{\alpha-1}$$

Comme $a = b\alpha$ et $a > b$, on a $\alpha \geq 2$. Pour tout $\alpha \geq 3$, $\alpha - 1 \geq 2$ et donc, par le lemme,

$$b^{\alpha-1} \geq \alpha + 1 \neq \alpha$$

On en déduit que $\alpha = 2$. De là, $\alpha = 2 = b^{\alpha-1} = b$ puis $a = b\alpha = 4$. $\square$