

Soit $(F_n)_{n \geq 0}$ la suite de Fibonacci, définie par

$$F_0 = 0; F_1 = 1; \forall n \geq 0, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

1. On montre par récurrence sur n que $\forall n \geq 0, F_n \wedge F_{n+1} = 1$.

C'est évident lorsque $n = 0$. Si l'on suppose la propriété vraie pour un entier naturel n , alors, d'après Bézout, $\exists u, v \in \mathbb{Z}, uF_n + vF_{n+1} = 1$, d'où $u(F_{n+2} - F_{n+1}) + vF_{n+1} = 1$, et on termine par Bézout.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

C'est une simple récurrence sur n , utilisant que $M^{n+1} = M^n M$. On convient de poser $F_{-1} = 1$ pour que l'égalité ait un sens lorsque $n = 0$.

3. On a

$$(*) \forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, F_n = F_{n-m}F_{m-1} + F_mF_{n-m+1}$$

Il suffit d'écrire que $M^n = M^{n-m}M^m$, et regarder le coefficient ligne 2, colonne 1 des matrices.

Remarque : L'égalité (*) peut fort bien être démontrée par récurrence sur n , $n \geq m$, sans recours aux matrices. Elle est trivialement réalisée pour $n = m$ et $n = m + 1$, et le passage des rangs n et $n + 1$ au rang $n + 2$ se fait en additionnant simplement des égalités.

4. Soient $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$. Soit $d \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{l|l} d & F_m \\ d & F_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} d & F_m \\ d & F_{n-m} \end{array} \right\}$$

En effet, d'après (*), si $d \mid F_m$ et $d \mid F_{n-m}$, alors d divise le membre droit de l'égalité, donc $d \mid F_n$. Inversement, si $d \mid F_m$ et $d \mid F_n$, alors, toujours d'après (*), $d \mid F_{n-m}F_{m-1}$. Mais on a vu que F_m et F_{m-1} sont premiers entre eux. Donc, grâce au théorème de Gauss, on conclut que $d \mid F_{n-m}$.

5. Soient $m, n \in \mathbb{N}, n \geq m$. On écrit la division euclidienne de n par m : $n = qm + r$, avec $0 \leq r < m$. Alors, pour tout entier naturel d , on a

$$\left\{ \begin{array}{l|l} d & F_n \\ d & F_m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} d & F_m \\ d & F_r \end{array} \right\}$$

Il suffit d'itérer le résultat précédent (ou de faire une récurrence si on est consciencieux). L'entier d divise F_m et F_n si et seulement si il divise F_m et F_{n-m} , si et seulement si il divise F_m et F_{n-m-m} , $\dots$, si et seulement si il divise F_m et F_{n-qm} .

6. Soient m et n deux entiers naturels. On a

$$F_m \wedge F_n = F_{m \wedge n}$$

C'est une application directe de l'algorithme d'Euclide sur le résultat précédent. On construit la suite des restes des divisions euclidiennes successives formées à partir de m et n :

$$r_1 = n \mod m, r_2 = m \mod r_1, r_3 = r_1 \mod r_2, \dots$$

Le dernier reste non nul est le PGCD δ de m et de n . On a alors

$$\left\{ \begin{array}{l|l} d & F_n \\ d & F_m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} d & F_m \\ d & F_{r_1} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l|l} d & F_\delta \\ d & F_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow d \mid F_\delta$$

Le plus grand diviseur commun de F_m et F_n est donc F_δ .