Sommes de diviseurs

Marc Lorenzi

29 janvier 2023

Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel k, notons

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$$

Pour tout entier naturel non nul n, notons $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Clairement, si $d \in \mathcal{D}(a)$ et $d' \in \mathcal{D}(b)$, alors $dd' \in \mathcal{D}(ab)$. Considérons l'application

$$f : \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b) \longrightarrow \mathcal{D}(ab)$$

définie par

$$f(d, d') = dd'$$

Proposition 1. *Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a et b sont premiers entre-eux. Alors, f est une bijection.*

Démonstration. Soient (d_1, d_1') et (d_2, d_2') deux éléments de $\mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$. Supposons que $f(d_1, d_1') = f(d_2, d_2')$. On a donc $d_1 d_1' = d_2 d_2'$. L'entier d_1 divise $d_2 d_2'$. d_1 divise x et d_2' divise y qui est premier avec x. Facilement, $d_1 \wedge d_2' = 1$. Par le lemme de Gauss, d_1 divise d_2. De même, d_2 divise d_1, et donc $d_1 = d_2$. En reportant, on déduit $d_1' = d_2'$. Ainsi, f est injective.

Montrons que f est surjective. Soit $d \in \mathcal{D}(ab)$. Soient $d' = a \wedge d$ et $d'' = b \wedge d$. On a $(d', d'') \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$. Montrons que $f(d', d'') = d$.

Remarquons que, a et b étant premiers entre-eux, d' et d'' sont premiers entre-eux. Écrivons $a = k'd'$ et $b = k''d''$ où $k', k'' \in \mathbb{N}^*$.

d' divise d et d'' divise d. Comme d' et d'' sont premiers entre-eux, $d'd''$ divise d.

Comme $d' = a \wedge d$, il existe $u', v' \in \mathbb{Z}$ tels que $d' = u'a + v'd$. De même, il existe $u'', v'' \in \mathbb{Z}$ tels que $d'' = u''b + v''d$. On a

$$\begin{aligned} d'd'' &= (u'a + v'd)(u''b + v''d) \\ &= u'u''ab + Vd \end{aligned}$$

où $V = u'v''a + u''v'b + v'v''d$. Comme d divise ab, d divise aussi $u'u''ab + Vd$. Ainsi, d divise $d'd''$.

Finalement, $d'd'' = d$. On en déduit que f est surjective. Remarquons que nous avons explicité la réciproque de f. C'est la fonction

$$g : \mathcal{D}(ab) \longrightarrow \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)$$

définie par

$$g(d) = (a \wedge d, b \wedge d)$$

□

Proposition 2. *Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$. On suppose a et b premiers entre-eux. Alors,*

$$\sigma_k(ab) = \sigma_k(a)\sigma_k(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sigma_k(ab) &= \sum_{d \in \mathcal{D}(ab)} d^k \\
&= \sum_{(d',d'') \in \mathcal{D}(a) \times \mathcal{D}(b)} (d'd'')^k \\
&= \sum_{d' \in \mathcal{D}(a)} \sum_{d'' \in \mathcal{D}(b)} d'^k d''^k \\
&= \sum_{d' \in \mathcal{D}(a)} d'^k \sum_{d'' \in \mathcal{D}(b)} d''^k \\
&= \sigma_k(a)\sigma_k(b)
\end{aligned}$$

□

Proposition 3. *Soit $k \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{N}$. Soient $a_1, \ldots, a_r$ r entiers naturels non nuls premiers entre-eux deux à deux. Alors,*

$$\sigma_k\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) = \prod_{i=1}^{r} \sigma_k\left(a_i\right)$$

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur r. C'est clair si $r = 0$, car dans ce cas les deux membres de l'égalité valent 1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour r. Soient $a_1, \ldots, a_{r+1}$ $r+1$ entiers non nuls premiers entre-eux deux à deux. Alors, $a_1 \ldots a_r$ est premier avec a_{r+1}. Par la proposition précédente,

$$\sigma_k\left(\prod_{i=1}^{r+1} a_i\right) = \sigma_k\left(\prod_{i=1}^{r} a_i\right) \sigma_k(a_{r+1})$$

On conclut ensuite grâce à l'hypothèse de récurrence. □

Proposition 4. *Soit p un nombre premier. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{R}$.*

- $\sigma_0(p^\alpha) = \alpha + 1$.
- *Si $k \neq 0$, alors*
$$\sigma_k(p^\alpha) = \frac{p^{k(\alpha+1)} - 1}{p^k - 1}$$

Démonstration. Les diviseurs de p^α sont $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$. On a donc

$$\sigma_k(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} (p^j)^k = \sum_{j=0}^{\alpha} (p^k)^j$$

Tout d'abord,

$$\sigma_0(p^\alpha) = \sum_{j=0}^{\alpha} 1 = \alpha + 1$$

Supposons maintenant $k = 0$, de sorte que $p^k \neq 1$. On a alors

$$\sigma_k(p^\alpha) = \frac{(p^k)^{\alpha+1} - 1}{p^k - 1}$$

d'où le résultat. □

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers positifs. Pour tout entier naturel non nul n et tout $p \in \mathcal{P}$, soit $\nu_p(n)$ la *valuation p-adique* de n, c'est à dire le plus grand entier naturel α tel que p^α divise n. Rappelons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\nu_p(n)}$$

Proposition 5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{R}$.*

- *On a*
$$\sigma_0(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (\nu_p(n) + 1)$$
- *Si $k \neq 0$,*
$$\sigma_k(n) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{p^{k(\nu_p(n)+1)} - 1}{p^k - 1}$$

Démonstration. Les entiers $p^{\nu_p(n)}$ sont premiers entre-eux deux à deux. □

Voici $\delta(n)$ en fonction de n pour $1 \leq n \leq 10^3$.