

Une somme de Gauss

Marc Lorenzi

19 avril 2021

1 Un résultat sur les séries de Fourier

1.1 Sommes trigonométriques

Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout entier N , posons

$$S_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{2i\pi kx}$$

Lemme 1. *Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $S_N(x) = 2N + 1$. Si x est différent de 0 de 1, alors*

$$S_N(x) = \frac{\sin(2N + 1)\pi x}{\sin \pi x}$$

Démonstration. Les cas $x = 0$ et $x = 1$ sont évidents. Supposons $0 < x < 1$. Alors $q = e^{2i\pi x} \neq 1$. On a

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=-N}^N q^k \\ &= \sum_{k=-N}^{-1} q^k + \sum_{k=0}^N q^k \\ &= \sum_{k=1}^N q^{-k} + \sum_{k=0}^N q^k \\ &= \frac{q^{-N-1} - q^{-1}}{q^{-1} - 1} + \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1} \\ &= -\frac{q^{-N} - 1}{q - 1} + \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1} \\ &= \frac{q^{N+1} - q^{-N}}{q - 1} \end{aligned}$$

Factorisons $q^{\frac{1}{2}} = e^{i\pi x}$ au numérateur et au dénominateur pour obtenir

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{q^{N+\frac{1}{2}} - q^{-N-\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sin(2N+1)\pi x}{\sin \pi x} \end{aligned}$$

□

Lemme 2.

$$\int_0^1 S_N(x) dx = 1$$

Démonstration. Si $k \neq 0$,

$$\int_0^1 e^{2i\pi kx} dx = \frac{1}{2ik\pi} \left[e^{2i\pi kx} \right]_0^1 = 0$$

et si $k = 0$, cette même intégrale vaut 1. La somme pour k variant de $-N$ à N vaut donc 1. □

1.2 Un cas particulier du théorème de Dirichlet

On se donne dans tout le paragraphe une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous allons tout d'abord montrer quelques résultats préliminaires.

Lemme 3.

$$\sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} dt = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(1-t) e^{2i\pi kt} dt$$

Démonstration. Soit $k \in \llbracket -N, N \rrbracket$. Faisons dans la première intégrale le changement de variable $t = 1 - x$. Il vient

$$\int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} dt = \int_0^1 f(1-x) e^{-2i\pi kx} dx$$

car $e^{2i\pi k(1-x)} = e^{2i\pi k} e^{-2i\pi kx} = e^{-2i\pi kx}$. En sommant pour k entre $-N$ et N , on en déduit

$$\sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} dt = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(1-t) e^{-2i\pi kt} dt$$

Il suffit de faire le changement d'indice $k' = -k$ dans la somme du membre de droite pour obtenir le résultat. $\square$

Conséquence. On a

$$\sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} dt = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 \frac{f(t) + f(1-t)}{2} e^{2i\pi kt} dt$$

Proposition 4. Soit $g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x) + f(1-x) - f(0) - f(1)}{2 \sin \pi x}$$

La fonction g est prolongeable par continuité à $[0, 1]$.

Démonstration. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^0$ sur $]0, 1[$. De plus, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f(x) + f(1-x) - f(0) - f(1) = x(f'(0) - f'(1)) + o_0(x)$$

Ainsi,

$$g(x) = \frac{x(f'(0) - f'(1)) + o_0(x)}{2 \sin \pi x} \sim_0 \frac{x(f'(0) - f'(1)) + o_0(x)}{2\pi x} = \frac{f'(0) - f'(1) + o_0(1)}{2\pi}$$

g a donc une limite finie en 0, qui est

$$\frac{f'(0) - f'(1)}{2\pi}$$

Comme $g(x) = g(1-x)$, on en déduit que g a la même limite en 1. $\square$

Dorénavant, nous appelons encore g le prolongement de g à $[0, 1]$.

Lemme 5. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction Riemann-intégrable. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(t) \sin nt dt = 0$$

Démonstration. Il s'agit du lemme de Riemann-Lebesgue.

Commençons par prouver le résultat lorsque g est en escalier sur $[0, 1]$. Il existe un entier $N \geq 1$, une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$ de $[0, 1]$ et une famille de réels $(y_i)_{0 \leq i \leq N-1}$ telles que pour tout $i \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$,

$g(x) = y_i$. On a alors, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) \sin nt \, dt &= \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(t) \sin nt \, dt \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} y_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin nt \, dt \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{N-1} y_i [\cos nt]_{x_i}^{x_{i+1}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left| \int_0^1 g(t) \sin nt \, dt \right| \leq \frac{C}{n}$$

où

$$C = 2 \sum_{i=0}^{N-1} |y_i|$$

L'intégrale $\int_0^1 g(t) \sin nt \, dt$ tend bien vers 0.

Supposons maintenant que g est Riemann-intégrable. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq g \leq \psi$ et $\int_0^1 (\psi - \varphi) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 g(t) \sin nt \, dt - \int_0^1 \varphi(t) \sin nt \, dt \right| &\leq \int_0^1 |g(t) - \varphi(t)| \, dt \\ &\leq \int_0^1 \psi(t) - \varphi(t) \, dt \leq \frac{1}{2}\varepsilon \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme φ est en escalier, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \int_0^1 \varphi(t) \sin nt \, dt \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Pour tout entier $n \geq N$, on a donc

$$\left| \int_0^1 g(t) \sin nt \, dt \right| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Ainsi, $\int_0^1 g(t) \sin nt \, dt$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. $\square$

Nous voici arrivés au but de ce paragraphe.

Théorème 6. *Lorsque N tend vers l'infini,*

$$\sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} \, dt \longrightarrow \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

Démonstration. Considérons la quantité

$$U_N = \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f(t) e^{2i\pi kt} dt - \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

On a aussi, par linéarité de l'intégrale et la conséquence du lemme 3,

$$U_N = \int_0^1 \frac{f(t) + f(1-t) - f(0) - f(1)}{2} S_N(t) dt$$

Pour tout $t \in]0, 1[$ on a, par le lemme 1,

$$\frac{f(t) + f(1-t) - f(0) - f(1)}{2} S_N(t) = g(t) \sin(2N+1)\pi t$$

Cette égalité reste vraie si $x = 0$ ou $x = 1$ car ses deux membres sont alors nuls. On a donc

$$U_N = \int_0^1 g(t) \sin(2N+1)t dt$$

La fonction g étant continue, donc Riemann-intégrable, sur $[0, 1]$, par le lemme 5, cette quantité tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. $\square$

2 Une somme de Gauss

Nous allons dans cette section montrer une égalité due à Gauss.

Théorème 7. *Pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{n} (1+i)(1+i^{-n})$$

Il existe plusieurs démonstrations de ce résultat. La preuve ci-dessous a l'avantage d'être « élémentaire ».

Démonstration. Commençons par remarquer que

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = \sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{(s+1)^2}{n}}$$

La raison essentielle en est que $e^{2i\pi \frac{0^2}{n}} = e^{2i\pi \frac{n^2}{n}} = 1$. Il s'ensuit que

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} + e^{2i\pi \frac{(s+1)^2}{n}} \right)$$

Posons pour tout $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $\xi \in [0, 1]$,

$$f_s(\xi) = e^{2i\pi \frac{(s+\xi)^2}{n}}$$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f_s(0) + f_s(1)) \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_0^1 f_s(t) e^{2i\pi kt} dt \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \sum_{s=0}^{n-1} \int_0^1 f_s(t) e^{2i\pi kt} dt \end{aligned}$$

Par le changement de variable $t \leftarrow s + t$, on a

$$\int_0^1 f_s(t) e^{2i\pi kt} dt = \int_s^{s+1} f_s(t-s) e^{2i\pi kt} dt = \int_s^{s+1} e^{2i\pi (\frac{t^2}{n} + kt)} dt$$

Ainsi, par la formule de Chasles,

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_0^n e^{2i\pi (\frac{t^2}{n} + kt)} dt$$

et enfin, par le changement de variable $t = nx$,

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = n \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_0^1 e^{2i\pi n(x^2 + kx)} dx$$

Posons

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi x^2} dx$$

Il est connu que cette intégrale est convergente. Nous allons d'ailleurs obtenir sa valeur un peu plus loin. En posant $x = \sqrt{n}t$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\sqrt{n}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi nt^2} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{2i\pi nt^2} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n(x+k)^2} dx \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n(x^2 + 2kx)} dx \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\sqrt{n}} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} e^{2i\pi n t^2} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n (x+k-\frac{1}{2})^2} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2in\pi(k-\frac{1}{2})^2} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+(2k-1)x)} dx \\
&= i^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+(2k-1)x)} dx
\end{aligned}$$

En effet,

$$e^{2in\pi(k-\frac{1}{2})^2} = e^{2in\pi(k^2-k+\frac{1}{4})} = e^{in\frac{\pi}{2}} = i^n$$

De là,

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma}{\sqrt{n}}(1+i^{-n}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+2kx)} dx + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+(2k-1)x)} dx \\
&= \sum_{k \text{ pair}} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+kx)} dx + \sum_{k \text{ impair}} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+kx)} dx \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+kx)} dx \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N \int_0^1 e^{2i\pi n (x^2+kx)} dx \\
&= \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}}
\end{aligned}$$

Prenant $n = 1$ ci-dessus, on obtient $\gamma(1-i) = 1$, d'où

$$\gamma = \frac{1}{2}(1+i)$$

Ainsi,

$$\sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{n}(1+i)(1+i^{-n})$$

□

La valeur de la somme dépend de la classe de congruence de n modulo 4. Le tableau ci-dessous résume les valeurs de la somme

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=0}^{n-1} e^{2i\pi \frac{s^2}{n}}$$

$n \bmod 4$	0	1	2	3
S_n	$1+i$	1	0	i

Source : *E. Landau, Elementary Number Theory, Chapter VI*