

Triplets pythagoriciens

Marc Lorenzi

18 janvier 2025

1 Une équation diophantienne

Une *équation diophantienne* est une équation dont les inconnues sont des entiers relatifs. Nous allons nous intéresser dans cet article à une équation diophantienne très simple, l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Les solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ de cette équation sont les *triplets pythagoriciens*. Il existe de nombreux domaines où apparaissent les triplets pythagoriciens.

- Ils fournissent les triangles rectangles dont les côtés sont entiers.
- Ce sont les points à coordonnées entières du cône de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.
- Ils permettent d'obtenir les points à coordonnées rationnelles du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et de l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$.

Commençons par l'évidence. Les triplets pythagoriciens dont l'un des éléments est nul sont les triplets $(0, \pm t, \pm t)$ et $(\pm t, 0, \pm t)$ où $t \in \mathbb{Z}$. En particulier, le seul triplet pythagoricien de la forme $(x, y, 0)$ est $(0, 0, 0)$. Si (x, y, z) est un triplet pythagoricien alors (y, x, z) en est un aussi. Enfin, (x, y, z) est un triplet pythagoricien si et seulement si $(\pm x, \pm y, \pm z)$ l'est aussi.

Nous noterons dans la suite $\mathcal{P}$ l'ensemble des triplets pythagoriciens et $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des triplets pythagoriciens dont les éléments sont positifs ou nuls. On a donc

$$\mathcal{P} = \{(\pm x, \pm y, \pm z) : (x, y, z) \in \mathcal{P}^+\}$$

L'instruction Python

```
[(x, y, z) for x in range(1, 101)
             for y in range(x, 101)
             for z in range(1, 101)
             if x**2 + y**2 == z**2]
```

permet d'obtenir les triplets $(x, y, z) \in \mathcal{P}^+$ tels que $x, y, z \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ et $x \leq y$. Il y en a 52, qui sont

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 12, 15), (9, 40, 41), (10, 24, 26), (11, 60, 61), (12, 16, 20), (12, 35, 37), (13, 84, 85), (14, 48, 50), (15, 20, 25), (15, 36, 39), (16, 30, 34), (16, 63, 65), (18, 24, 30), (18, 80, 82), (20, 21, 29), (20, 48, 52), (21, 28, 35), (21, 72, 75), (24, 32, 40), (24, 45, 51), (24, 70, 74), (25, 60, 65), (27, 36, 45), (28, 45, 53), (28, 96, 100),

(30, 40, 50), (30, 72, 78), (32, 60, 68), (33, 44, 55), (33, 56, 65), (35, 84, 91), (36, 48, 60), (36, 77, 85), (39, 52, 65), (39, 80, 89), (40, 42, 58), (40, 75, 85), (42, 56, 70), (45, 60, 75), (48, 55, 73), (48, 64, 80), (51, 68, 85), (54, 72, 90), (57, 76, 95), (60, 63, 87), (60, 80, 100), (65, 72, 97)

Enfin, remarquons l'égalité évidente

$$(a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Pour tous $k, a, b \in \mathbb{Z}$, le triplet

$$k(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$$

est donc un triplet pythagoricien. Nous allons montrer que tous les triplets pythagoriciens sont de cette forme.

2 Triplets primitifs

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}^+$ différent de $(0, 0, 0)$. Soit $\delta \neq 0$ le pgcd de x, y et z . On a $x = \delta x', y = \delta y'$ et $z = \delta z'$ où $\text{pgcd}(x', y', z') = 1$. Écrivons

$$\delta^2(x'^2 + y'^2) = \delta^2 z'^2$$

pour en déduire

$$x'^2 + y'^2 = z'^2$$

Le triplet (x', y', z') est donc un triplet pythagoricien dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Proposition 1. *Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien. On a équivalence entre*

1. $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.
2. Deux des entiers x, y, z sont premiers entre eux.

Démonstration.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supposons, par exemple, que $\text{pgcd}(x, y) \neq 1$. Soit p un nombre premier divisant x et y . Comme $x^2 + y^2 = z^2$, l'entier p divise z^2 . Or, p est premier, donc p divise z . Ainsi, p divise $\text{pgcd}(x, y, z)$ donc $\text{pgcd}(x, y, z) \neq 1$.

(2) $\Rightarrow$ (1) est immédiat. $\square$

Proposition 2. *Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien tel que $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$. L'un des entiers x et y est pair, et l'autre est impair.*

Démonstration. x et y ne peuvent pas être tous les deux pairs, puisque $\text{pgcd}(x, y) = 1$. Supposons que x et y sont tous les deux impairs. Le carré d'un entier impair est congru à 1 modulo 4. On a donc

$$z^2 = x^2 + y^2 \equiv 1 + 1 = 2 \pmod{4}$$

C'est impossible, car le carré d'un entier est congru à 0 ou à 1 modulo 4, mais jamais à 2. $\square$

Remarque. Comme x et y sont de parités différentes, z est impair.

Définition 1. Le triplet pythagoricien $(x, y, z) \in \mathcal{P}^+$ est *primitif* lorsque x est impair, y est pair et $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$.

Nous noterons $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des triplets primitifs. On a donc

$$\mathcal{P}^+ = \{k(x, y, z) : k \in \mathbb{N}, (x, y, z) \in \mathcal{P}_0\} \cup \{k(y, x, z) : k \in \mathbb{N}, (x, y, z) \in \mathcal{P}_0\}$$

Il y a 17 triplets pythagoriciens primitifs appartenant à $\llbracket 0, 100 \rrbracket^3$ qui sont

(1, 0, 1), (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (9, 40, 41), (11, 60, 61), (13, 84, 85), (15, 8, 17), (21, 20, 29), (33, 56, 65), (35, 12, 37), (39, 80, 89), (45, 28, 53), (55, 48, 73), (63, 16, 65), (65, 72, 97), (77, 36, 85)

3 La forme des triplets primitifs

Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien primitif. Posons $y = 2y'$ où $y' \in \mathbb{N}$. Comme x et z sont impairs, $z - x$ et $z + x$ sont pairs. Posons donc

$$z + x = 2\alpha \quad \text{et} \quad z - x = 2\beta$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$. Remarquons que $\alpha + \beta = z$ et $\alpha - \beta = x$. On a

$$4y'^2 = y^2 = z^2 - x^2 = (z + x)(z - x) = 4\alpha\beta$$

et donc $y'^2 = \alpha\beta$.

Proposition 3. α et β sont premiers entre eux.

Démonstration. Soit d un diviseur de α et β . L'entier d divise alors $z = \alpha + \beta$ et $x = \alpha - \beta$ donc, puisque x et z sont premiers entre eux, $d = 1$. $\square$

Proposition 4. α et β sont des carrés.

Démonstration. Soit $\delta = \text{pgcd}(y', \alpha)$. Écrivons $y' = \delta y''$ et $\alpha = \delta \alpha'$ où y'' et α' sont premiers entre eux. On a

$$\delta^2 y''^2 = \delta \alpha' b$$

d'où

$$\delta y''^2 = \alpha' \beta$$

Ainsi, δ divise $\alpha' \beta$. Comme δ divise α et $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$, on a aussi $\text{pgcd}(\delta, \beta) = 1$. Par le lemme de Gauss, δ divise α' . Il existe donc $\alpha'' \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha' = \delta \alpha''$. On a donc

$$\alpha = \delta \alpha' = \delta^2 \alpha''$$

et aussi

$$y'' = \alpha'' \beta$$

Remarquons que α'' divise α' et $\text{pgcd}(\alpha', y'') = 1$. On a donc $\text{pgcd}(\alpha'', y'') = 1$. Or, l'égalité ci-dessus nous dit que α'' divise y'' . Par le lemme de Gauss, α'' divise 1, donc $\alpha'' = 1$. Ainsi, $\alpha = \delta^2 \alpha'' = \delta^2$ est un carré. De même, β est un carré. $\square$

Proposition 5. *Il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ et $z = a^2 + b^2$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, $z + x = 2a^2$ et $z - x = 2b^2$ où $a, b \in \mathbb{N}$. De là $x = a^2 - b^2$ et $z = a^2 + b^2$. Enfin,

$$y^2 = z^2 - x^2 = (a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$$

donc $y = 2ab$. $\square$

Examinons maintenant la réciproque. Quels sont les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ donnant lieu à des triplets primitifs ?

Théorème 6. *Les triplets pythagoriciens primitifs sont les triplets*

$$(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$$

où $a \geq b$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$, et $a \not\equiv b \pmod{2}$.

Démonstration. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que le triplet $(x, y, z) = (a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ est primitif. On a $a \geq b$ car $x = a^2 - b^2 \in \mathbb{N}$. Par la proposition 3, les entiers $\alpha = a^2$ et $\beta = b^2$ sont premiers entre eux, donc $\text{pgcd}(a, b) = 1$. De plus, $x = a^2 - b^2$ est impair, donc $a \not\equiv b \pmod{2}$.

Inversement, soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a \geq b$, $\text{pgcd}(a, b) = 1$ et $a \not\equiv b \pmod{2}$. Soient $x = a^2 - b^2$, $y = 2ab$ et $z = a^2 + b^2$. On a $x^2 + y^2 = z^2$, donc (x, y, z) est un triplet pythagorien. L'entier y est évidemment pair et x est impair.

Supposons par l'absurde que $\text{pgcd}(x, y) \neq 1$. Soit p un diviseur premier de x et y . Comme x est impair, $p \neq 2$. L'entier p divise $y = 2ab$ donc, comme p est premier et différent de 2, p divise a ou p divise b . Comme a et b sont premiers entre eux, p ne divise pas à la fois a et b . Par exemple, p divise a et p ne divise pas b . Mais alors, p ne divise pas $a^2 - b^2 = x$. Contradiction. $\square$

4 Une bijection

Notons

$$\mathcal{C} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2, a \geq b, \text{pgcd}(a, b) = 1, a \not\equiv b \pmod{2}\}$$

Soit $\varphi : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}_0$ définie par $\varphi(a, b) = (a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$.

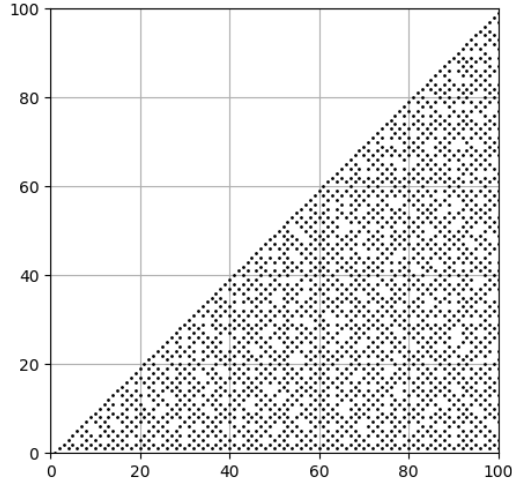


FIGURE 1 – les points de $\mathcal{C}$ de coordonnées inférieures ou égales à 100

Proposition 7. *La fonction φ est une bijection.*

Démonstration. Par le théorème 6, la fonction φ admet bien $\mathcal{P}_0$ pour ensemble d'arrivée. Par la proposition 5, elle est surjective. Il reste à prouver qu'elle est injective. Soient $(a, b), (a', b') \in \mathcal{C}$. Supposons que $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$. On a donc

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= a'^2 - b'^2 \\ a^2 + b^2 &= a'^2 + b'^2 \end{cases}$$

En additionnant, il vient $a^2 = a'^2$, d'où $a = a'$. De même, $b = b'$ en soustrayant. $\square$

On vérifie facilement que pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$,

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = \left(\sqrt{\frac{z+x}{2}}, \sqrt{\frac{z-x}{2}} \right)$$

5 Trois familles de triplets pythagoriciens

Nous allons dans cette section nous intéresser aux triplets pythagoriciens primitifs (x, y, z) dont l'une des coordonnées est presque égale à l'une des deux autres. On met ainsi en évidence trois familles de triplets : ceux pour lesquels $z = y + 1$, ceux pour lesquels $z = x + 2$, et enfin ceux pour lesquels $y = x \pm 1$. Les deux premières familles sont faciles à déterminer. Pour la troisième famille, c'est un peu plus délicat.

5.1 La séquence de Pythagore

Définition 2. Un *triplet de Pythagore* est un triplet primitif (x, y, z) tel que $z = y + 1$.

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$. Soit $(a, b) = \varphi^{-1}(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Le triplet (x, y, z) est un triplet de Pythagore si et seulement si

$$a^2 + b^2 = 2ab + 1$$

c'est à dire

$$(a - b)^2 = 1$$

ou encore, puisque $a \geq b$, $a = b + 1$. Inversement, pour tout $b \in \mathbb{N}$, on a $(b + 1, b) \in \mathcal{C}$. Les triplets de Pythagore sont donc les triplets

$$(2b + 1, 2b^2 + 2b, 2b^2 + 2b + 1)$$

où $b \in \mathbb{N}$.

Définition 3. La *séquence de Pythagore* est la suite de terme général

$$(x_n, y_n, z_n) = (2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$$

n	x_n	y_n	z_n
0	1	0	1
1	3	4	5
2	5	12	13
3	7	24	25
4	9	40	41
5	11	60	61
6	13	84	85
7	15	112	113
8	17	144	145
9	19	180	181
10	21	220	221

FIGURE 2 – les premiers termes de la séquence de Pythagore

5.2 La séquence de Platon

Définition 4. Un *triplet de Platon* est un triplet primitif (x, y, z) tel que $z = x + 2$.

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$. Soit $(a, b) = \varphi^{-1}(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Le triplet (x, y, z) est un triplet de Platon si et seulement si

$$a^2 + b^2 = a^2 - b^2 + 2$$

c'est à dire $b = 1$. La condition que $a \not\equiv b \pmod{2}$ impose que a soit pair. Inversement, pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ pair, le couple $(a, 1)$ appartient à $\mathcal{C}$. Les triplets de Platon sont donc les triplets

$$(4a^2 - 1, 4a, 4a^2 + 1)$$

où $a \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5. La *séquence de Platon* est la suite de terme général

$$(x_n, y_n, z_n) = (4n^2 - 1, 4n, 4n^2 + 1)$$

n	x_n	y_n	z_n
1	3	4	5
2	15	8	17
3	35	12	37
4	63	16	65
5	99	20	101
6	143	24	145
7	195	28	197
8	255	32	257
9	323	36	325
10	399	40	401

FIGURE 3 – Les premiers termes de la séquence de Platon

5.3 La séquence de Fermat

Définition 6. Un *triplet de Fermat* est un triplet primitif (x, y, z) tel que $y = x \pm 1$.

Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$. Soit $(a, b) = \varphi^{-1}(x, y, z) \in \mathcal{C}$. Le triplet (x, y, z) est un triplet de Fermat si et seulement si

$$2ab = a^2 - b^2 \pm 1$$

ou encore

$$(a - b)^2 - 2b^2 = \pm 1$$

Remarquons que si a et b vérifient cette égalité alors, par le théorème de Bézout, $a - b$ et b sont premiers entre eux, donc a et b le sont aussi. Remarquons aussi

que $(a - b)^2 = 2b^2 \pm 1$ est impair, donc $a - b$ est impair et donc $a \not\equiv b \pmod{2}$.
On a donc automatiquement $(a, b) \in \mathcal{C}$.

L'équation

$$(E) \quad u^2 - 2v^2 = \pm 1$$

d'inconnues entières u, v est liée à l'anneau

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{u + v\sqrt{2} \mid (u, v) \in \mathbb{Z}^2\}$$

Nous admettrons ici que les solutions de (E) sont les couples $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $u + v\sqrt{2}$ soit un élément inversible de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Les solutions à coordonnées positives ou nulles sont les couples (u_n, v_n) tels que

$$u_n + v_n\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$$

où $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que

$$u_n - v_n\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^n,$$

on peut obtenir explicitement u_n et v_n en fonction de n . Nous allons plutôt ici nous intéresser à des relations de récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + v_{n+1}\sqrt{2} &= (u_n + v_n\sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) \\ &= (u_n + 2v_n) + (u_n + v_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n \\ v_{n+1} &= u_n + v_n \end{cases}$$

De là, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - v_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} - u_n - v_n = v_{n+1} + v_n$$

et donc

$$v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$$

De plus, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$.

Les couples (a_n, b_n) donnant lieu à un triplet de Fermat sont donnés par $a_n - b_n = u_n$ et $b_n = v_n$, ou encore $a_n = v_{n+1}$ et $b_n = v_n$. On en déduit les triplets de Fermat (x_n, y_n, z_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 7. La *séquence de Fermat* est la suite de terme général

$$(x_n, y_n, z_n) = \varphi(v_{n+1}, v_n)$$

où $v_0 = 0$, $v_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$.

n	x_n	y_n	z_n
0	1	0	1
1	3	4	5
2	21	20	29
3	119	120	169
4	697	696	985
5	4059	4060	5741
6	23661	23660	33461
7	137903	137904	195025
8	803761	803760	1136689
9	4684659	4684660	6625109
10	27304197	27304196	38613965

FIGURE 4 – les triplets de Fermat (x_n, y_n, z_n) pour $n \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$.

Les quelques valeurs ci-dessus suggèrent la proposition suivante.

Proposition 8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = x_n + (-1)^{n+1}$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= 2a_nb_n - a_n^2 + b_n^2 \\ &= 2v_{n+1}v_n - v_{n+1}^2 + v_n^2 \end{aligned}$$

De là, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= 2(2v_n + v_{n-1})v_n - (2v_n + v_{n-1})^2 + v_n^2 \\ &= -2v_nv_{n-1} - v_{n-1}^2 + v_n^2 \\ &= -(y_{n-1} - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_n - x_n = (-1)^n(y_0 - x_0) = (-1)^{n+1}$$

□

6 Le cercle unité

Le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ est

$$\mathcal{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$$

Proposition 9. *Les points de $\mathcal{U}$ à coordonnées rationnelles sont les points $(\pm x/z, \pm y/z)$ tels que $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$ ou $(y, x, z) \in \mathcal{P}_0$.*

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{Q}$. Posons $u = x/z$ et $v = y/t$ où $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $(z, t) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $\text{pgcd}(x, z) = \text{pgcd}(y, t) = 1$. Supposons $(u, v) \in \mathcal{U}$. On a

$$(\star) \quad x^2 t^2 + y^2 z^2 = z^2 t^2$$

Remarquons que

$$z^2(t^2 - y^2) = x^2 t^2$$

L'entier z^2 divise donc $x^2 t^2$. Or, $\text{pgcd}(x^2, z^2) = 1$. Par le lemme de Gauss, z^2 divise t^2 . De même, t^2 divise z^2 et donc $z^2 = t^2$. Comme $z, t \in \mathbb{N}^*$, $z = t$. En simplifiant par z^2 , la condition $(\star)$ s'écrit

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Le triplet (x, y, z) est donc pythagoricien. De plus, $\text{pgcd}(x, z) = 1$ donc, a fortiori, $\text{pgcd}(x, y, z) = 1$. Ainsi, $(|x|, |y|, z) \in \mathcal{P}_0$ ou $(|y|, |x|, z) \in \mathcal{P}_0$.

Inversement, supposons que $(x, y, z) \in \mathcal{P}_0$. Soient $u = \pm x/z$ et $v = \pm y/z$. Les rationnels u et v sont écrits sous forme de fraction irréductible et $(u, v) \in \mathcal{U}$. De même pour (v, u) . $\square$

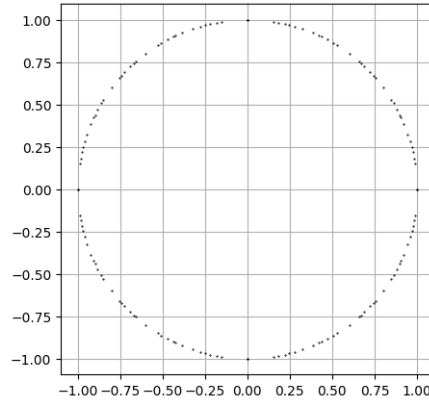


FIGURE 5 – les points à coordonnées rationnelles de $\mathcal{U}$ dont le dénominateur des coordonnées est inférieur ou égal à 100

Remarque. Des modifications mineures dans ce que nous venons de faire permettent de trouver les points à coordonnées rationnelles de l'hyperbole équilatère

$$(\mathcal{H}) \quad x^2 - y^2 = 1$$

Proposition 10. *L'ensemble des points à coordonnées rationnelles de $\mathcal{U}$ est dense dans $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Soit $\theta \in [0, \pi/2]$. Soit $t = \tan(\theta/2) \in [0, 1]$. Le réel t est la limite d'une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels de $[0, 1]$. Posons $t_n = b_n/a_n$ où $a_n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq b_n$ et $\text{pgcd}(a_n, b_n) = 1$. On peut également choisir (exercice) a_n et b_n de parités distinctes, de sorte que $(a_n, b_n) \in \mathcal{C}$. On a alors

$$\frac{a_n^2 - b_n^2}{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1 - t_n^2}{1 + t_n^2}$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette quantité tend vers

$$\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = \cos \theta$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n^2 - b_n^2$, $y_n = 2a_nb_n$ et $z_n = a_n^2 + b_n^2$. Le triplet (x_n, y_n, z_n) est primitif et $u_n = x_n/z_n$ tend vers $\cos \theta$. Remarquons que

$$\frac{y_n^2}{z_n^2} = 1 - \frac{x_n^2}{z_n^2}$$

tend vers $1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$. Comme y_n et z_n sont positifs et $\sin \theta$ aussi, $v_n = y_n/z_n$ tend vers $\sin \theta$.

Nous avons donc trouvé une suite $((u_n, v_n))_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\mathcal{U}$ à coordonnées rationnelles telle que (u_n, v_n) tend vers $(\cos \theta, \sin \theta)$. On en déduit la densité dans le quart de cercle $0 \leq \theta \leq \pi/2$. On a des résultats en analogues sur le reste du cercle en considérant $(\pm u_n, \pm v_n)$. $\square$