

Distance de Hausdorff

Marc Lorenzi

29 juin 2023

Résumé

Étant donné un entier $p \geq 1$, l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ des compacts non vides de $\mathbb{R}^p$ peut être muni d'une structure d'espace métrique complet au moyen de la *distance de Hausdorff*. À partir d'un nombre fini d'applications contractantes de $\mathbb{R}^p$ vers lui-même, on peut construire une application contractante de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ vers lui-même. Cette application possède un unique point fixe, qui peut être approché par les termes d'une suite récurrente de compacts non vides. On estime l'erreur commise en approchant ce point fixe par un terme de la suite, puis on illustre par un exemple simple et classique : la courbe de von Koch.

Dans tout l'article, p désigne un entier non nul. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est muni d'une norme $\| \cdot \|$. On note d la distance associée.

1 Distance d'un point à une partie non vide de $\mathbb{R}^p$

1.1 Introduction

Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^p$ non vide. L'ensemble

$$E = \{d(x, a) : a \in A\}$$

est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Elle admet donc une borne inférieure..

Définition 1. La *distance* de x à A est

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}^p$. Soit $r \geq 0$. Prenons $A = \overline{B}(a, r)$, la boule fermée de centre a et de rayon r . Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Si $x \in A$ alors, évidemment, $d(x, A) = 0$. Supposons $x \notin A$. Notons $D = d(x, a)$, de sorte que $D > r$. Soit $u = \frac{1}{D}(x - a)$. Soit $y \in A$. On a

$$d(x, y) \geq d(a, x) - d(a, y) \geq D - r$$

Ainsi, $d(x, A) \geq D - r$. De plus, en prenant $y = a + ru \in A$, on a

$$d(x, y) = d(a + ru, a + Du) = \|(r - D)u\| = |r - D| = D - r$$

Ainsi,

$$d(x, A) = d(x, a) - r$$

Remarquons que, dans tous les cas,

$$d(x, A) = \max(0, d(x, a) - r)$$

Proposition 1. Soit $A \subseteq \mathbb{R}^p$ non vide. La fonction $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$. On a

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$

et donc

$$d(y, a) \geq d(x, A) - d(x, y)$$

Ainsi, $d(x, A) - d(x, y)$ minore $\{d(y, a) : a \in A\}$, donc

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$

ou encore

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

En échangeant les rôles de x et y , on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$$

Finalement,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

□

1.2 Ensembles compacts

Rappelons brièvement la notion d'ensemble compact. Un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}^p$ est *compact* lorsque de toute suite d'éléments de A on peut extraire une suite qui converge dans A . Les parties compactes de $\mathbb{R}^p$ sont les ensembles qui sont *fermés* et *bornés*.

On note $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ l'ensemble des parties compactes non vides de $\mathbb{R}^p$.

$$\mathcal{K}(\mathbb{R}^p) = \{A \subseteq \mathbb{R}^p, A \text{ compact}, A \neq \emptyset\}$$

Par exemple, les boules fermées sont compactes.

Proposition 2. Soit $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soit $x \in \mathbb{R}^p$. Il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A telle que $d(x, a_n)$ converge vers $d(x, A)$. L'ensemble A est compact, il existe donc une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$. La suite de terme général $d(x, a_{\varphi(n)})$ converge alors vers $d(x, a)$, mais aussi vers $d(x, A)$. Ainsi,

$$d(x, A) = d(x, a)$$

□

1.3 δ -voisinages

Définition 2. Soient $A \subseteq \mathbb{R}^p$ non vide et $\delta > 0$. Le δ -voisinage de A est

$$A^\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : d(x, A) \leq \delta\}$$

Lorsque nous aurons défini la distance de Hausdorff, nous pourrions justifier l'appellation de « voisinage ». On étend cette définition à $\delta = 0$ en posant $A^0 = A$.

Proposition 3. Soient $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ et $\delta \geq 0$. On a

$$A^\delta = \{x \in \mathbb{R}^p : \exists a \in A, d(x, a) \leq \delta\}$$

Démonstration. Soit $x \in A^\delta$. Il existe $a \in A$ tel que $d(x, A) = d(x, a)$. Pour un tel a , $d(x, a) \leq \delta$. Inversement, soit $x \in \mathbb{R}^p$. Supposons qu'il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) \leq \delta$. Par définition de $d(x, A)$, on a $d(x, A) \leq \delta$ et donc $x \in A^\delta$. □

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}^p$. Soit $r \geq 0$. Reprenons l'exemple de $A = \overline{B}(a, r)$, la boule fermée de centre a et de rayon r . Facilement, on a pour tout $\delta \geq 0$,

$$A^\delta = \overline{B}(a, r + \delta)$$

Proposition 4. Pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ et tout $\delta \geq 0$, $A^\delta \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$.

Démonstration. Tout d'abord, $A \subseteq A^\delta$ donc A^δ est non vide. Soit $R > 0$ tel que pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq R$. Soit $x \in A^\delta$. Il existe $a \in A$ tel que $d(a, x) \leq R$. De là,

$$\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \delta + R$$

L'ensemble A^δ est donc borné.

Soit $(x_n)_n \geq 0$ une suite d'éléments de A^δ convergeant vers $x \in \mathbb{R}^p$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_n \in A^\delta$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(x_n, a_n) \leq \delta$. L'ensemble A étant compact, on peut extraire de (a_n) une suite $(a_{\varphi(n)})$ qui converge vers $a \in A$. La suite $(x_{\varphi(n)})$, extraite de (x_n) , converge encore vers x . Pour tout $j \geq 0$, on a $d(a_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) \leq \delta$. En passant à la limite, on obtient $d(a, x) \leq \delta$. Ainsi, $x \in A^\delta$. $\square$

2 La métrique de Hausdorff

2.1 Introduction

Définition 3. Pour tous ensembles $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$,

$$h(A, B) = \sup\{d(a, B) : a \in A\}$$

Remarque. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Les ensembles A et B sont bornés, car compacts. Soient $R, R' \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $a \in A$, $\|a\| \leq R$ et pour tout $b \in B$, $\|b\| \leq R'$. On a pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$,

$$d(a, b) = \|a - b\| \leq \|a\| + \|b\| \leq R + R'$$

Ainsi, $d(a, B) \leq R + R'$. l'ensemble $\{d(a, B) : a \in A\}$ est donc une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. cet ensemble possède bien une borne supérieure.

En fait, cette borne supérieure est un maximum.

Proposition 5. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$h(A, B) = \max\{d(a, B) : a \in A\}$$

Démonstration. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A telle que $d(a_n, B)$ converge vers $h(A, B)$. Comme A est compact, on peut extraire de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$. Par la proposition 1, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|d(a_{\varphi(n)}, B) - d(a, B)| \leq d(a_{\varphi(n)}, a)$$

Ainsi, la suite de terme général $d(a_{\varphi(n)}, B)$ converge vers $d(a, B)$. Comme elle converge aussi vers $h(A, B)$, on en déduit que

$$h(A, B) = d(a, B)$$

d'où le résultat. $\square$

Proposition 6. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soit

$$E = \{\delta \geq 0 : A \subseteq B^\delta\}$$

Il existe $\delta_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $E = [\delta_0, +\infty[$.

Démonstration. Facilement, comme A et B sont bornés et B n'est pas vide, l'ensemble E est non vide. Comme E est minoré par 0, E possède une borne inférieure δ_0 . On a donc $E \subseteq [\delta_0, +\infty[$.

Montrons que $\delta_0 \in E$, c'est à dire $A \subseteq B^{\delta_0}$. Soit $x \in A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A \subseteq B^{\delta_0 + \frac{1}{n}}$, donc il existe $b_n \in B$ tel que $d(x, b_n) \leq \delta_0 + \frac{1}{n}$. L'ensemble B étant compact, on peut extraire de la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite $(b_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ qui converge vers $b \in B$. On a pour tout $n \geq 1$,

$$d(x, b_{\varphi(n)}) \leq \delta_0 + \frac{1}{\varphi(n)}$$

Comme $\varphi(n)$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini on obtient, en passant à la limite,

$$d(x, b) \leq \delta_0$$

Ainsi, $x \in B^{\delta_0}$.

Soit $\delta \geq \delta_0$. On a $A \subseteq B^{\delta_0} \subseteq B^\delta$, donc $\delta \in E$. Ainsi, $[\delta_0, +\infty[\subseteq E$. $\square$

Définition 4. Pour tous ensembles $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$,

$$h'(A, B) = \min\{\delta \geq 0 : A \subseteq B^\delta\}$$

Proposition 7. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$h(A, B) = h'(A, B)$$

Démonstration. Posons

$$E = \{\delta > 0 : A \subseteq B^\delta\}$$

$$F = \{d(a, B) : a \in A\}$$

Il s'agit de montrer que $\max(F) = \min(E)$. Notons $\delta_0 = \min E$. Soit $a_0 \in A$ tel que $d(a_0, B) = \max F$. Notons $d_0 = d(a_0, B)$. Il s'agit de prouver que $d_0 = \delta_0$.

On a $A \subseteq B^{\delta_0}$. Comme $a_0 \in A$, on a donc $d(a_0, B) \leq \delta_0$. Ainsi, $d_0 \leq \delta_0$.

Inversement, pour tout $a \in A$, $d(a, B) \leq d_0$, donc $A \subseteq B^{d_0}$. Ainsi, $d_0 \in E$, donc $\delta_0 \leq d_0$. $\square$

2.2 La distance de Hausdorff

Définition 5. Pour $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$, on pose

$$H(A, B) = \max(h(A, B), h(B, A))$$

La fonction $H : \mathcal{K}(\mathbb{R}^p) \times \mathcal{K}(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est la *distance de Hausdorff*. Nous verrons bientôt qu'il s'agit effectivement d'une distance.

On peut également écrire $H(A, B)$ sous une autre forme.

Proposition 8. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$H(A, B) = \min\{\delta \geq 0 : A \subseteq B^\delta \text{ et } B \subseteq A^\delta\}$$

Démonstration. Soit

$$E = \{\delta > 0 : A \subseteq B^\delta \text{ et } B \subseteq A^\delta\}$$

On a $E = E' \cap E''$ où

$$E' = \{\delta > 0 : A \subseteq B^\delta\} = [\delta', +\infty[$$

$$E'' = \{\delta > 0 : B \subseteq A^\delta\} = [\delta'', +\infty[$$

où $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+$. De là

$$E' \cap E'' = [\delta, +\infty[$$

où $\delta = \max(\delta', \delta'')$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \min(E) &= \max(\min(E'), \min(E'')) \\ &= \max(h'(A, B), h'(B, A)) \\ &= \max(h(A, B), h(B, A)) \\ &= H(A, B) \end{aligned}$$

□

2.3 H est une distance sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$

Lemme 9. Soient $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soient $\delta, \delta' \geq 0$. On suppose $A \subseteq B^\delta$ et $B \subseteq C^{\delta'}$. Alors $A \subseteq C^{\delta+\delta'}$.

Démonstration. Soit $a \in A$. Il existe $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq \delta$. Et il existe $c \in C$ tel que $d(b, c) \leq \delta'$. De là,

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c) \leq \delta + \delta'$$

□

Proposition 10. H est une distance sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$.

Démonstration.

- Pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ et tout $\varepsilon > 0$, $A \subseteq A^\varepsilon$, donc $H(A, A) = 0$.
- Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Supposons que $H(A, B) = 0$. Soit $a \in A$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $A \subseteq B^{\frac{1}{n}}$ donc il existe $b_n \in B$ tel que $d(b_n, a) \leq \frac{1}{n}$. Lorsque n tend vers l'infini, b_n tend vers a . Comme B est fermé, on en déduit que $a \in B$. Ainsi, $A \subseteq B$. De même, $B \subseteq A$ et donc $A = B$.
- Soient $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $d' = H(A, B)$ et $d'' = H(B, C)$. On a

$$A \subseteq B^{d'+\varepsilon}$$

De $B \subseteq C^{d''+\varepsilon}$ on déduit

$$B^{d'+\varepsilon} \subseteq C^{d'+d''+2\varepsilon}$$

Ainsi,

$$A \subseteq C^{d'+d''+2\varepsilon}$$

De même,

$$C \subseteq A^{d'+d''+2\varepsilon}$$

Ainsi,

$$H(A, C) \leq d' + d'' + 2\varepsilon$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$H(A, C) \leq d' + d'' = H(A, B) + H(B, C)$$

□

2.4 Un exemple

Proposition 11. Soient $a, b \in \mathbb{R}^p$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$. Soient $A = \overline{B}(a, r)$ et $B = \overline{B}(b, r')$ les boules fermées de centres a, b et de rayons r, r' . On a

$$H(A, B) = \|b - a\| + |r' - r|$$

Démonstration. Soit $x \in A$. Si $\|x - b\| \leq r'$ alors $d(x, B) = 0$. Sinon, $d(x, B) = \|x - b\| - r'$. De là, si $A \subseteq B$ alors

$$h(A, B) = \max\{d(x, B), x \in A\} = 0$$

Sinon,

$$h(A, B) = \|a - b\| + r - r'$$

Remarquons que $A \subseteq B$ si et seulement si la quantité ci-dessus est négative. On a donc, dans tous les cas,

$$h(A, B) = \max(0, \|a - b\| + r - r')$$

De même,

$$h(B, A) = \max(0, \|a - b\| + r' - r)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \max(\max(0, \|a - b\| + r - r'), \max(0, \|a - b\| + r' - r)) \\ &= \max(0, \max(\|a - b\| + r - r', \|a - b\| + r' - r)) \\ &= \max(0, \|a - b\| + |r - r'|) \\ &= \|a - b\| + |r - r'| \end{aligned}$$

□

2.5 Complétude

Proposition 12. $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^p), H)$ est un espace métrique complet.

Démonstration. Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soit

$$A = \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{i \geq k} A_i}$$

Nous allons montrer que $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ et que A_n tend vers A lorsque n tend vers l'infini.

• **Étape 1 :** $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (A_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $i, j \geq N$, $H(A_i, A_j) \leq \varepsilon$. Ainsi, pour tout $i \geq N$, $A_i \subseteq A_N^\varepsilon$ et donc

$$\bigcup_{i \geq N} A_i \subseteq A_N^\varepsilon$$

L'ensemble A_N^ε étant fermé, on peut passer à l'adhérence :

$$(1) \quad \overline{\bigcup_{i \geq N} A_i} \subseteq A_N^\varepsilon$$

Cette adhérence de réunion est fermée, comme toute adhérence. Elle est aussi bornée car incluse dans un ensemble borné. C'est donc un ensemble compact. Les A_i étant non vides, c'est donc un compact non vide. Toute intersection de compacts non vides étant encore un compact non vide, on en déduit que $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Soit N associé à ε par le critère de Cauchy : pour tous $i, j \geq N$, $H(A_i, A_j) \leq \varepsilon$.

- **Étape 2 : pour tout $n \geq N$, $A \subseteq A_n^{2\varepsilon}$.**
Soit $n \geq N$. On a $H(A_N, A_n) \leq \varepsilon$ donc, $A_N \subset A_n^\varepsilon$, d'où $A_N^\varepsilon \subseteq A_n^{2\varepsilon}$. Mais par (1), $A \subseteq A_N^\varepsilon$, donc $A \subseteq A_n^{2\varepsilon}$.
- **Étape 3 : pour tout $n \geq N$, $A_n \subset A^{2\varepsilon}$**
Soit $n \geq N$. Soit $a_n \in A_n$. Pour $i > n$, $A_n \subset A_i^\varepsilon$. Il existe donc $a_i \in A_i$ tel que $\|a_n - a_i\| \leq \varepsilon$. Comme pour tout $i \geq n$, $A_i \subseteq A_N^\varepsilon$, la suite $(a_i)_{i \geq n}$ est une suite de points de A_N^ε . Cet ensemble est compact, il en existe donc une suite extraite $(a_{i_j})_{j \geq 0}$ qui converge, lorsque $j \rightarrow \infty$, vers $a \in A_N^\varepsilon$. Pour tout entier k , et tout j assez grand, $a_{i_j} \in \bigcup_{r \geq k} A_r$. Donc $a \in \overline{\bigcup_{r \geq k} A_r}$. Ceci étant vrai pour tout k , $a \in \bigcap_{k \geq 0} \overline{\bigcup_{r \geq k} A_r} = A$.
Pour tout $j \geq 0$, $|a_{i_j} - a_n| \leq \varepsilon$. En passant à la limite pour $j \rightarrow \infty$, on en déduit que $|a - a_n| \leq \varepsilon \leq 2\varepsilon$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $A_n \subseteq A^{2\varepsilon}$.
- **Étape 4 : conclusion**
Les étapes 2 et 3 montrent que pour tout $n \geq N$, $H(A_n, A) \leq 2\varepsilon$. Ainsi,

$$A_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} A$$

□

3 Applications contractantes

3.1 Introduction

Définition 6. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $k \in [0, 1[$. Une application $f : E \rightarrow E$ est k -contractante si pour tous $x, y \in E$,

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

3.2 Passage à la distance de Hausdorff

Proposition 13. Soit $k \in [0, 1[$. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application k -contractante. L'application $f : \mathcal{K}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ qui à tout compact A non vide de $\mathbb{R}^p$ associe $f(A)$, son image directe par f , est aussi k -contractante.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Soit $d = H(A, B)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a' \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $a' = f(a)$. Comme $A \subseteq B^{d+\varepsilon}$, il existe $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq d + \varepsilon$. Ainsi,

$$d(f(a), f(b)) \leq kd(a, b) \leq kd + k\varepsilon$$

Comme $f(b) \in f(B)$, on en déduit que $a' = f(a) \in f(B)^{kd+k\varepsilon}$. Ainsi,

$$f(A) \subseteq f(B)^{kd+k\varepsilon}$$

De même,

$$f(B) \subseteq f(A)^{kd+k\varepsilon}$$

et donc

$$H(f(A), f(B)) \leq kd + k\varepsilon$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, donc

$$H(f(A), f(B)) \leq kd = kH(A, B)$$

□

Proposition 14. Soient $A, B, C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq \max(H(A, C), H(B, D))$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Notons $d' = H(A, C)$ et $d'' = H(B, D)$. Soit $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, alors il existe $c \in C$ tel que $d(x, c) \leq d' + \varepsilon$. Sinon, $x \in B$ et il existe alors $d \in D$ tel que $d(x, d) \leq d'' + \varepsilon$. Dans tous les cas, il existe $y \in C \cup D$ tel que

$$d(x, y) \leq \max(d', d'') + \varepsilon$$

Ainsi,

$$A \cup B \subseteq (C \cup D)^{\max(d', d'') + \varepsilon}$$

De même,

$$C \cup D \subseteq (A \cup B)^{\max(d', d'') + \varepsilon}$$

Ainsi,

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq \max(d, d') + \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit

$$H(A \cup B, C \cup D) \leq \max(d, d')$$

□

Corollaire 15. Soient $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$H\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq n} H(A_i, B_i)$$

Démonstration. Pour $n = 1$, il n'y a rien à montrer et pour $n = 2$, c'est la proposition précédente. Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour n . On a

$$D = H\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i, \bigcup_{i=1}^{n+1} B_i\right) = H(A \cup A_{n+1}, B \cup B_{n+1})$$

où

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ et } B = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

De là,

$$D \leq \max(H(A, B), H(A_{n+1}, B_{n+1}))$$

et on termine en utilisant l'hypothèse de récurrence. $\square$

Proposition 16. Soient $f_1, \dots, f_q$ des applications contractantes de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^p$. Notons $k_1, \dots, k_q$ les constantes de contraction. Soit

$$k = \max(k_1, \dots, k_q)$$

Considérons l'application

$$\mathcal{T} : \mathcal{K}(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$$

définie pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ par

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{i=1}^q f_i(A)$$

L'application $\mathcal{T}$ est k -contractante.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. On a

$$\begin{aligned} H(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)) &= H\left(\bigcup_{i=1}^q f_i(A), \bigcup_{i=1}^q f_i(B)\right) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq q} H(f_i(A), f_i(B)) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq q} k_i H(A, B) \\ &= k H(A, B) \end{aligned}$$

$\square$

3.3 Point fixe

Dans ce paragraphe nous reprenons les données de la proposition précédente. $f_1, \dots, f_q$ sont q applications contractantes de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^p$. On note $k_1, \dots, k_q$ leurs constantes de contraction respectives. On pose également

$$k = \max(k_1, \dots, k_q)$$

On considère l'application

$$\mathcal{T} : \mathcal{K}(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$$

définie pour tout $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ par

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{i=1}^q f_i(A)$$

Par la proposition précédente, $\mathcal{T}$ est k -contractante.

Proposition 17. $\mathcal{T}$ possède au plus un point fixe.

Démonstration. Soient $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ deux points fixes de $\mathcal{T}$. On a

$$H(\mathcal{T}(A), \mathcal{T}(B)) = H(A, B) \leq kH(A, B)$$

donc

$$(1 - k)H(A, B) \leq 0$$

Comme $1 - k > 0$, on en déduit $H(A, B) = 0$. Ainsi, $A = B$. $\square$

Proposition 18. Soit $A_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme A_0 et, pour tout $n \geq 0$, par $A_{n+1} = \mathcal{T}(A_n)$ converge, et sa limite A est un point fixe de $\mathcal{T}$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$,

$$H(A_n, A_{n+1}) = H(\mathcal{T}(A_{n-1}), \mathcal{T}(A_n)) \leq kH(A_{n-1}, A_n)$$

On en déduit par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$,

$$H(A_n, A_{n+1}) \leq k^n H(A_0, A_1)$$

De là, pour tous $n < m$,

$$\begin{aligned} H(A_n, A_m) &\leq \sum_{i=n}^{m-1} H(A_i, A_{i+1}) \\ &\leq H(A_0, A_1) \sum_{i=n}^{m-1} k^i \\ &= k^n H(A_0, A_1) \sum_{j=0}^{m-n-1} k^j \\ &\leq k^n H(A_0, A_1) \sum_{j=0}^{\infty} k^j \\ &= \frac{k^n}{1-k} H(A_0, A_1) \end{aligned}$$

La suite $(A_n)_{n \geq 0}$ est donc une suite de Cauchy. Comme $\mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ est complet pour la distance de Hausdorff, cette suite converge donc vers $A \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$. Pour tout entier $n \geq 0$,

$$H(\mathcal{T}(A_n), \mathcal{T}(A)) \leq kH(A_n, A)$$

donc $H(\mathcal{T}(A_n), \mathcal{T}(A))$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Dit autrement, $\mathcal{T}(A_n)$ tend vers $\mathcal{T}(A)$. Mais $\mathcal{T}(A_n) = A_{n+1}$ converge vers A . Par unicité de la limite, $\mathcal{T}(A) = A$. Ainsi, A est un point fixe de $\mathcal{T}$. $\square$

Corollaire 19. Avec les notations ci-dessus, on a pour tout entier $n \geq 0$

$$H(A_n, A) \leq \frac{k^n}{1-k} H(A_0, A_1)$$

Démonstration. Faire tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité montrée ci-dessus.
□

Corollaire 20. $\mathcal{T}$ possède un unique point fixe.

4 Un exemple

4.1 Une application contractante

On se place dans $\mathbb{R}^2$, identifié à $\mathbb{C}$. Soient $P = \frac{1}{3}$ et $Q = \frac{2}{3}$. Définissons les 4 similitudes f_1, f_2, f_3, f_4 par

- f_1 est l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.
- $f_2 = \rho \circ h$ où h est l'homothétie de centre $\frac{1}{2}$ et de rapport $\frac{1}{3}$ et ρ est la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
- $f_3 = \rho' \circ h$ où ρ' est la rotation de centre Q et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
- f_4 est l'homothétie de centre 1 et de rapport $\frac{1}{3}$.

Ces 4 applications sont clairement $\frac{1}{3}$ contractantes. L'application $\mathcal{T} : K(\mathbb{R}^2) \longrightarrow K(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\mathcal{T}(A) = \bigcup_{i=1}^4 f_i(A)$$

est donc $\frac{1}{3}$ contractante. Les résultats de la partie précédente s'appliquent.

4.2 Itérations

Prenons pour A_0 le disque de centre $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$. Considérons la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ définie par $A_{n+1} = \mathcal{T}(A_n)$. Lorsque n tend vers l'infini, A_n converge vers $V \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$, où V est l'unique point fixe de $\mathcal{T}$. L'ensemble V est la *courbe de Von Koch*.

Calculons $H(A_0, A_1)$. L'ensemble A_1 est la réunion de 4 disques de rayon $\frac{1}{6}$:

- Le disque $D_1 = f_1(A_0)$. On a facilement

$$H(A_0, D_1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}$$

- Le disque $D_2 = f_2(A_0)$. On a un peu moins facilement

$$H(A_0, D_2) = \frac{1}{3} \sqrt{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{3}$$

- Les disques $D_3 = f_3(A_0)$ et $D_4 = f_4(A_0)$. Pour des raisons de symétrie, $H(A_0, D_3) = H(A_0, D_2)$ et $H(A_0, D_4) = H(A_0, D_1)$.

De là,

$$H(A_0, A_1) \leq \max \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \sqrt{2 - \frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3} \simeq 0.805$$

On a alors pour tout entier $n \geq 0$,

$$H(A_n, V) \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} H(A_0, A_1) \leq \frac{1}{3^n} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \right)$$

Par exemple,

$$H(A_6, V) \leq 1.7 \times 10^{-3} \leq \frac{1}{600}$$

Une représentation graphique de A_6 sur un écran de taille 600 pixels donnera donc une erreur inférieure au pixel. Voici un tracé de $A_0, \dots, A_6$.



