

La fonction de Takagi entière

Marc Lorenzi

28 octobre 2022

1 Distance à un sous-groupe de $\mathbb{Z}$

1.1 Introduction

Définition 1. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$, la *distance* de n à $m\mathbb{Z}$ est

$$n \odot m = \min\{|n - km| : k \in \mathbb{Z}\}$$

Proposition 1. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On a

$$n \odot m = \min(r, m - r)$$

où r est le reste de la division de n par m .

Autre façon de voir les choses :

- Si $2r \leq m$, alors $n \odot m = r$.
- Si $2r \geq m$, alors $n \odot m = m - r$.

Remarquons que si $2r = m$, les deux expressions r et $m - r$ ont la même valeur.

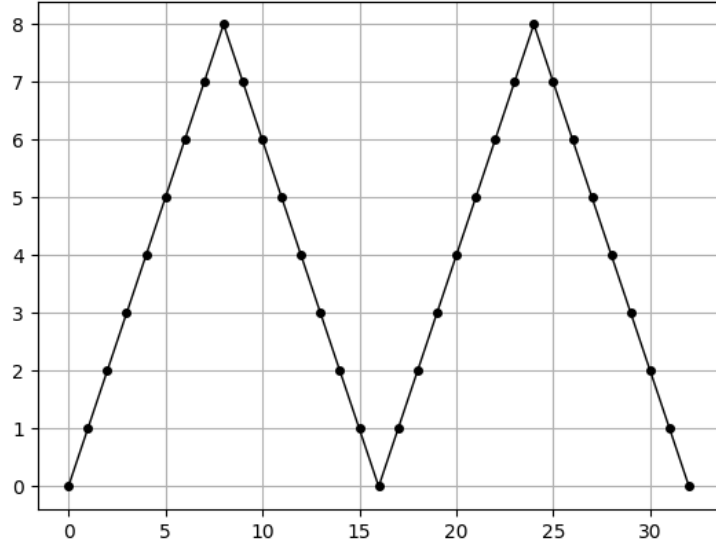
Démonstration. Notons $E = \{|n - km| : k \in \mathbb{Z}\}$. Posons $n = qm + r$, où $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \llbracket 0, m - 1 \rrbracket$. On a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$n - km = (q - k)m + r$$

- Si $k \leq q$, $|n - km| = (q - k)m + r \geq r$.
- Si $k \geq q + 1$, $n - km \leq -m + r < 0$ et donc $|n - km| = km - n \geq m - r$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, $x \geq \min(r, m - r)$. De plus, $r = |n - qm|$ et $m - r = |n - (q + 1)m|$ appartiennent à E . Ainsi, $\min E = \min(r, m - r)$. $\square$

La fonction $n \mapsto n \odot m$ est paire et périodique de période m . Voici $n \odot 16$ pour $n \in \llbracket 0, 32 \rrbracket$.



1.2 Doublement du modulo

Lemme 2. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 1$. On a

$$(2n) \odot (2m) = 2(n \odot m)$$

Démonstration. Écrivons $n = qm + r$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < m$. Remarquons que $2n = 2qm + 2r$, et $0 \leq 2r < 2m$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2n$ par $2m$ est $2r$.

- Cas 1, $0 \leq 2r \leq m$.

On a donc $n \odot m = r$. Remarquons que $2(2r) \leq 2m$, et donc

$$(2n) \odot (2m) = 2r = 2(n \odot m)$$

- Cas 2, $m < 2r$.

On a dans ce cas $n \odot m = m - r$. De plus,

$$2m < 2(2r)$$

et donc $(2n) \odot (2m) = 2m - 2r = 2(m - r) = 2(n \odot m)$.

□

Lemme 3. Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $m \geq 2$. On suppose que m est pair. On a

$$(2n + 1) \odot (2m) = n \odot m + (n + 1) \odot m$$

Démonstration. Écrivons $n = qm + r$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < m$. Remarquons que $2n + 1 = 2qm + 2r + 1$, et $0 \leq 2r + 1 < 2m$. Ainsi, le reste de la division euclidienne de $2n + 1$ par $2m$ est $2r + 1$. De plus, $n + 1 = qm + r + 1$. Si $r < m - 1$, alors le reste de la division de $n + 1$ par m est $r + 1$. Si, au contraire, $r = m - 1$, alors ce reste est 0.

- Cas 1, $0 \leq 2r \leq m - 1$. Comme m est pair, on a même $2r \leq m - 2$.
On a dans ce cas $n \odot m = r$. On a aussi $2(r + 1) \leq m$ et donc $(n + 1) \odot m = r + 1$. Enfin,

$$2(2r + 1) \leq 2(m - 1 + 1) = 2m$$

et donc

$$\begin{aligned} (2n + 1) \odot (2m) &= 2r + 1 \\ &= n \odot m + (n + 1) \odot m \end{aligned}$$

- Cas 2, $m \leq 2r$ et $r < m - 1$.
On a dans ce cas $n \odot m = m - r$. On a aussi $m < 2(r + 1)$ et donc $(n + 1) \odot m = m - (r + 1)$. De plus,

$$2(2r + 1) \geq 2m + 2 > 2m$$

et donc

$$\begin{aligned} (2n + 1) \odot (2m) &= 2m - (2r + 1) = (m - r) + (m - (r + 1)) \\ &= n \odot m + (n + 1) \odot m \end{aligned}$$

- Cas 3, $r = m - 1$.
On a dans ce cas $n \odot m = 1$ et $(n + 1) \odot m = 0$. De plus, $2r + 1 = 2m - 1$ et donc

$$\begin{aligned} (2n + 1) \odot (2m) &= 1 \\ &= n \odot m + (n + 1) \odot m \end{aligned}$$

□

Remarquons que le fait que m soit pair est indispensable. Par exemple,

$$11 \odot 23 + 12 \odot 23 = 11 + 11 = 22$$

alors que $23 \odot 46 = 23$.

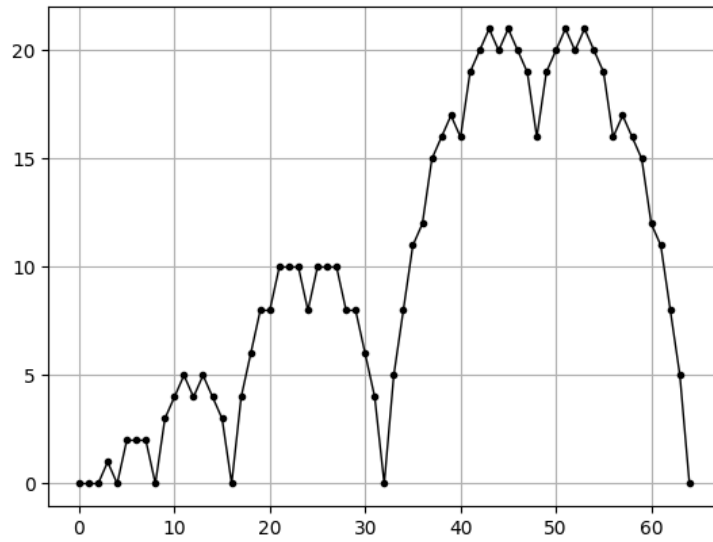
2 La fonction T

2.1 Introduction

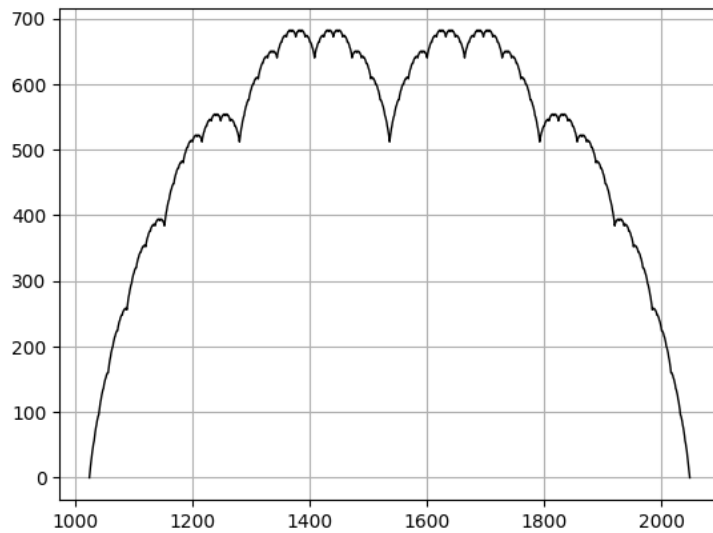
Définition 2. La fonction de Takagi entière $T : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est définie par $T(0) = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \lg n \rfloor} n \odot 2^k$$

Voici le graphe de T sur $\llbracket 0, 64 \rrbracket$.



Et voici le graphe de T sur $\llbracket 1024, 2048 \rrbracket$.



2.2 Quelques remarques sur l'expression de T

Soit $n \geq 1$. Remarquons que l'on peut faire indifféremment commencer la somme qui définit $T(n)$ à 0 ou à 1, puisque $n \odot 1 = 0$.

Autre remarque, pourquoi ne sommer que jusqu'à $p = \lfloor \lg n \rfloor$? On a $2^p \leq n < 2^{p+1}$. Soit $k > p$.

- Si $k = p + 1$, alors $2n \geq 2^k$ et donc $n \odot 2^k = 2^k - n$.
- Si $k \geq p + 2$, alors $2n < 2^{p+2} < 2^k$, et donc $n \odot 2^k = n$.

Ainsi, pour tout $q \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{p+q} n \odot 2^k = T(n) + 2^{p+1} + (q-2)n$$

2.3 Arches

Définition 3. Soit $p \in \mathbb{N}$. La p^{e} arche de T est la courbe $\mathcal{A}_p$ de la restriction de T à l'intervalle $I_p = \llbracket 2^p, 2^{p+1} \rrbracket$.

$$\mathcal{A}_p = \{(n, T(n)) : n \in I_p\}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \llbracket 2^{p+1}, 2^{p+1} + 2^{p+1} \rrbracket \\ &= \{2^{p+1} + n : n \in \llbracket 0, 2^{p+1} \rrbracket\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup_{j=0}^p \{2^{p+1} + n : n \in \llbracket 2^j, 2^{j+1} \rrbracket\} \\ &= \{0\} \cup \bigcup_{j=0}^p (2^{p+1} + I_j) \end{aligned}$$

Ainsi, l'intervalle I_{p+1} contient, d'une certaine façon, des copies des intervalles $I_0, I_1, \dots, I_p$.

Proposition 4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Soit $n \in I_j$. On a

$$T(2^{p+1} + n) = T(n) + 2^{j+1} + (p-j-1)n$$

Démonstration. Pour tout $k \leq p+1$,

$$(2^{p+1} + n) \odot 2^k = ((2^{p+1} + n) \bmod 2^k) \odot 2^k = n \odot 2^k$$

De là,

$$\begin{aligned}
T(2^{p+1} + n) &= \sum_{k=0}^{p+1} (2^{p+1} + n) \odot 2^k \\
&= \sum_{k=0}^j n \odot 2^k + \sum_{k=j+1}^{p+1} n \odot 2^k \\
&= T(n) + \sum_{k=j+1}^{p+1} n \odot 2^k
\end{aligned}$$

Soit $k \geq j + 1$.

- Si $k \geq j + 2$ alors, comme $2n \leq 2^{j+2} \leq 2^k$, on a $n \odot 2^k = n$.
- Comme $2n \geq 2^{j+1}$, on a $n \odot 2^{j+1} = 2^{j+1} - n$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
T(2^{p+1} + n) &= T(n) + \sum_{k=j+1}^{p+1} n \odot 2^k \\
&= T(n) + 2^{j+1} - n + \sum_{k=j+2}^{p+1} n \\
&= T(n) + 2^{j+1} + (p - j - 1)n
\end{aligned}$$

□

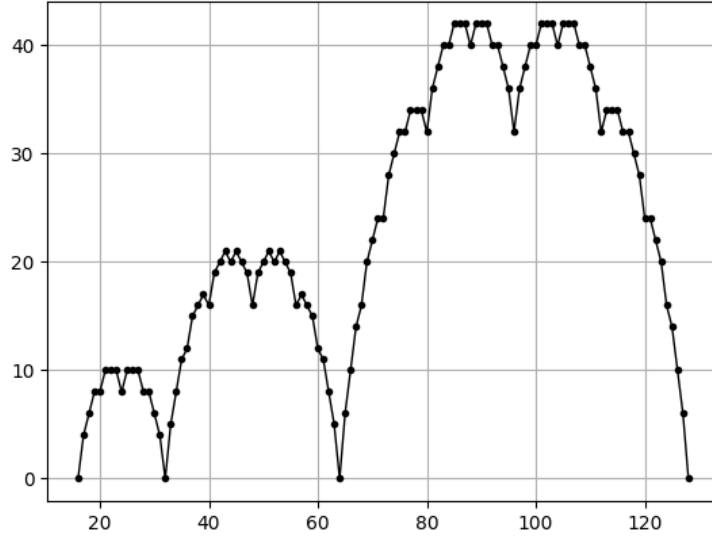
Un cas particulièrement intéressant est celui où $j = p - 1$.

Corollaire 5. Soit $p \geq 1$. Soit $n \in I_{p-1}$. On a

$$T(2^{p+1} + n) = T(n) + 2^p$$

Le corollaire précédent montre que la « bosse gauche » de $\mathcal{A}_{p+1}$ est l'image de $\mathcal{A}_{p-1}$ par la translation de vecteur $(2^{p+1}, 2^p)$.

Voici par exemple les arches $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$ et $\mathcal{A}_6$.



Dans le graphique ci-dessus, on voit clairement que *deux* parties de $\mathcal{A}_6$ sont semblables à $\mathcal{A}_4$. Ceci est évidemment général. Prouvons tout d'abord un lemme.

Lemme 6. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $n \in I_p$. On a

$$T(2^p + n) = T(n) + n - 2^p$$

Démonstration. Remarquons que $2^p + n \in I_{p+1}$. On a

$$\begin{aligned} T(2^p + n) &= \sum_{k=0}^{p+1} (2^p + n) \odot 2^k \\ &= \sum_{k=0}^p (2^p + n) \odot 2^k + (2^p + n) \odot 2^{p+1} \\ &= \sum_{k=0}^p n \odot 2^k + (2^p + n) \odot 2^{p+1} \\ &= T(n) + (2^p + n) \odot 2^{p+1} \end{aligned}$$

Remarquons que comme $n \in I_p$, on a

$$2^{p+1} \leq 2^p + n \leq 2^{p+1} + 2^p$$

De là,

$$0 \leq 2^p + n - 2^{p+1} \leq 2^p$$

et donc

$$(2^p + n) \odot 2^{p+1} = 2^p + n - 2^{p+1} = n - 2^p$$

Ainsi,

$$T(2^p + n) = T(n) + n - 2^p$$

□

Venons-en au résultat qui nous intéresse. Les points de la « bosse droite » de $\mathcal{A}_{p+1}$ ont leurs abscisses dans l'intervalle $\llbracket 2^{p+1} + 2^p, 2^{p+1} + 2^p + 2^{p-1} \rrbracket$. Ce sont donc les entiers de la forme $2^{p+1} + 2^{p-1} + n$, où $n \in I_{p-1}$.

Proposition 7. *Soit $p \geq 1$. Soit $n \in I_{p-1}$. On a*

$$T(2^{p+1} + 2^{p-1} + n) = T(n) + 2^p$$

Démonstration. Remarquons que $n' = 2^{p-1} + n \in I_p$. On a donc, par la proposition 4,

$$T(2^{p+1} + n') = T(n') + 2^{p+1} - n'$$

Par la proposition 6,

$$T(n') = T(2^{p-1} + n) = T(n) + n - 2^{p-1}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} T(2^{p+1} + 2^{p-1} + n) &= T(n') + 2^{p+1} - n' \\ &= T(n) + n - 2^{p-1} + 2^{p+1} - (2^{p-1} + n) \\ &= T(n) + 2^p \end{aligned}$$

□

Ainsi la « bosse droite » de $\mathcal{A}_{p+1}$ est l'image de $\mathcal{A}_{p-1}$ par la translation de vecteur $(2^{p+1} + 2^{p-1}, 2^p)$.

2.4 Relations de récurrence

La fonction T vérifie des relations de récurrence remarquables.

Proposition 8. *On a $T(0) = T(1) = 0$, et pour tout $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} T(2n) &= 2T(n) \\ T(2n+1) &= T(n) + T(n+1) + 1 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $n \geq 1$. Soit $p = \lfloor \lg n \rfloor$. On a alors $\lfloor \lg(2n) \rfloor = p + 1$. De

là, par le lemme 2,

$$\begin{aligned}
T(2n) &= \sum_{k=1}^{p+1} (2n) \odot 2^k \\
&= 2 \sum_{k=1}^{p+1} n \odot 2^{k-1} \\
&= 2 \sum_{k=0}^p n \odot 2^k \\
&= 2T(n)
\end{aligned}$$

Passons à $T(2n+1)$. On a $\lfloor \lg(2n+1) \rfloor = p+1$. De là, par le lemme 3,

$$\begin{aligned}
T(2n+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} (2n+1) \odot 2^k \\
&= (2n+1) \odot 2 + \sum_{k=2}^{p+1} (n \odot 2^{k-1} + (n+1) \odot 2^{k-1}) \\
&= 1 + \sum_{k=1}^p (n \odot 2^k + (n+1) \odot 2^k) \\
&= 1 + T(n) + T(n+1)
\end{aligned}$$

□

3 Les extrema de T

3.1 Minimum

Proposition 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(n) \geq 0$.*

Démonstration. C'est évident. □

Proposition 10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = 0$ si et seulement si $n = 0$ ou n est une puissance de 2.*

Démonstration. En utilisant les relations de récurrence vérifiées par T , on montre par une récurrence facile sur p que pour tout $p \in \mathbb{N}$, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$T(2^p m) = 2^p T(m)$$

En particulier, en prenant $m = 1$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$T(2^p) = 2^p T(1) = 0$$

Soit $m \geq 3$ un entier impair. Posons $m = 2m' + 1$, où $m' \in \mathbb{N}$. On a

$$T(m) = T(m') + T(m' + 1) + 1 \geq 1$$

Ainsi, $T(m) \neq 0$. De là, soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier qui n'est pas une puissance de 2. Écrivons $n = 2^p m$ où $p \in \mathbb{N}$ et $m \geq 3$ est impair. On a alors

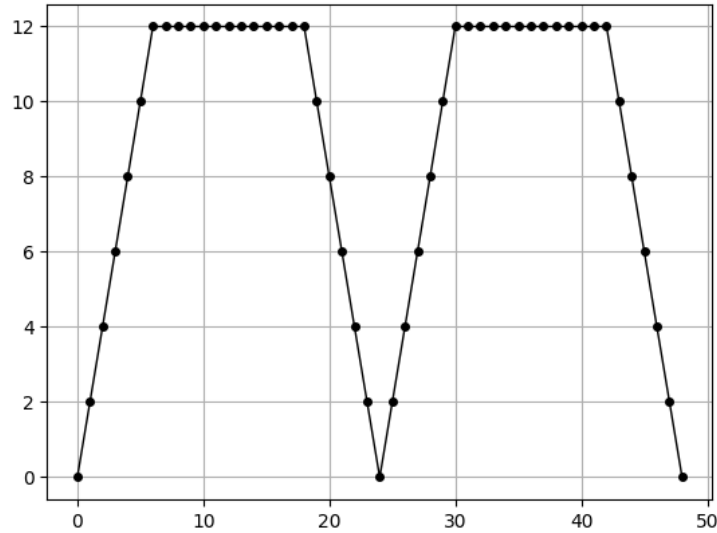
$$T(n) = 2^p T(m) \neq 0$$

□

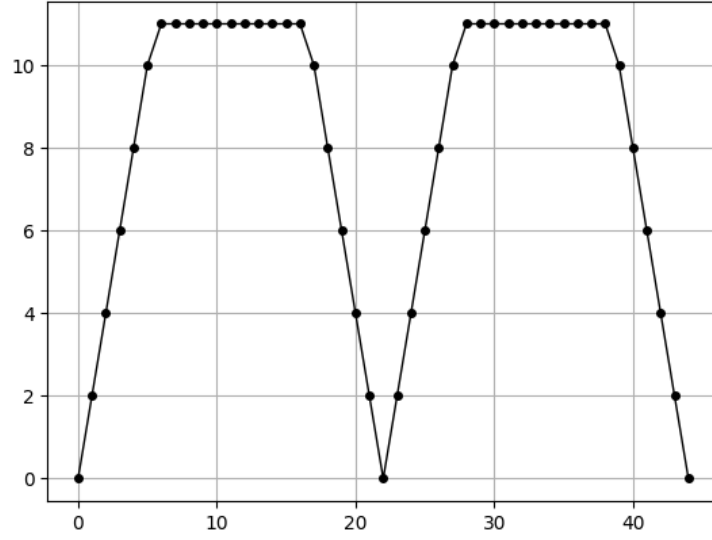
La fonction T a donc pour minimum 0, et ce minimum est atteint en 0 et pour les puissances de 2.

3.2 Maximum

Nous allons maintenant déterminer pour tout $p \in \mathbb{N}$ le maximum de la fonction T sur l'intervalle $\llbracket 2^p, 2^{p+1} \rrbracket$. L'idée est de regrouper deux par deux les termes de la somme qui définit $T(n)$. Voici par exemple, pour $m = 12$, la valeur de $n \odot m + n \odot (2m)$ pour $n \in \llbracket 0, 24 \rrbracket$.



Une majoration naïve de la quantité $n \odot m + n \odot (2m)$ donnerait $\frac{3}{2}m = 18$, alors que cette quantité reste inférieure ou égale à 12. Nous allons voir que ceci est général. Pour simplifier la discussion, nous allons supposer que m est pair. En fait, le résultat reste vrai pour m impair différent de 1 mais le nombre de cas à considérer est un peu plus grand. À titre d'illustration, voici ce que l'on obtient pour $m = 11$.



Proposition 11. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. On a

$$n \odot (2m) + n \odot m \leq m$$

Démonstration. Écrivons $n = 2qm + r$ où $q \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq r < 2m$.

- Cas 1, $r \leq \frac{m}{2}$. On a alors

$$n \odot (2m) = n \odot m = r$$

et donc

$$n \odot (2m) + n \odot m = 2r \leq m$$

- Cas 2, $\frac{m}{2} < r \leq m$. On a alors

$$n \odot (2m) = r \text{ et } n \odot m = m - r$$

d'où

$$n \odot (2m) + n \odot m = m$$

- Cas 3, $m < r \leq \frac{3m}{2}$. On a alors

$$n \odot (2m) = 2m - r \text{ et } n \odot m = r - m$$

d'où

$$n \odot (2m) + n \odot m = m$$

- Cas 4, $\frac{3m}{2} < r < 2m$. On a alors

$$n \odot (2m) = 2m - r \text{ et } n \odot m = 2m - r$$

d'où

$$n \odot (2m) + n \odot m = 4m - 2r \leq m$$

□

Donnons maintenant, pour tout entier n non nul, une majoration de $T(n)$ en fonction de $\lfloor \lg n \rfloor$. Nous verrons plus loin que cette majoration est optimale.

Proposition 12. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p = \lfloor \lg n \rfloor$.*

- *Si p est pair,*

$$T(n) \leq \frac{2}{3}2^p - \frac{2}{3}$$

- *Si p est impair,*

$$T(n) \leq \frac{2}{3}2^p - \frac{1}{3}$$

Remarque. On a $2^p \equiv (-1)^p \pmod{3}$. Si p est pair, $2^p - 1$ est un multiple de 3. Le réel $\frac{2}{3}2^p - \frac{2}{3}$ est donc un entier. De même, si p est impair, $2^{p+1} - 1$ est multiple de 3, et donc $\frac{2}{3}2^p - \frac{1}{3}$ est entier.

Démonstration. Supposons tout d'abord que $p = 2q$ est pair. On a

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{2q} n \odot 2^k \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} (n \odot 2^{2j+1} + n \odot 2^{2j+2}) \\ &\leq \sum_{j=0}^{q-1} 2^{2j+1} \\ &= \frac{2}{3}(2^p - 1) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $p = 2q + 1$ est impair. On a

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{k=1}^{2q+1} n \odot 2^k \\ &= n \odot 2 + \sum_{j=1}^q (n \odot 2^{2j} + n \odot 2^{2j+1}) \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^q 2^{2j} \\ &= 1 + \frac{4}{3}(2^{p-1} - 1) \\ &= \frac{2}{3}2^p - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant montrer que les majorants de la proposition ci-dessus sont atteints.

Proposition 13. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe $n \in \llbracket 2^p, 2^{p+1} \rrbracket$ tel que,

- Si p est pair,

$$T(n) = \frac{2}{3}2^p - \frac{2}{3}$$

- Si p est impair,

$$T(n) = \frac{2}{3}2^p - \frac{1}{3}$$

Démonstration. Pour tout entier naturel q , posons

$$\begin{aligned} m_q &= \sum_{j=0}^q 2^{2j} \\ n_q &= m_q + 2^{2q+1} \end{aligned}$$

On a $m_q \in \llbracket 2^{2q}, 2^{2q+1} \rrbracket$ et $n_q \in \llbracket 2^{2q+1}, 2^{2q+2} \rrbracket$. Remarquons que

$$\begin{aligned} m_q &= \sum_{j=0}^q 4^j \\ &= \frac{1}{3}(4^{q+1} - 1) \end{aligned}$$

Soit $1 \leq k \leq q$. On a

$$\begin{aligned} m_q \odot 2^{2k} &= \left(\sum_{j=0}^q 2^{2j} \right) \odot 2^{2k} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j} \right) \odot 2^{2k} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j} = \frac{1}{3}(2^{2k} - 1) \leq \frac{1}{2}2^{2k}$$

et donc

$$m_q \odot 2^{2k} = \sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j}$$

De même,

$$\begin{aligned} m_q \odot 2^{2k-1} &= \left(\sum_{j=0}^q 2^{2j} \right) \odot 2^{2k-1} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j} \right) \odot 2^{2k-1} \end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j} = \frac{1}{3}(2^{2k} - 1) \geq \frac{1}{2}2^{2k-1}$$

et donc

$$m_q \odot 2^{2k-1}\mathbb{Z} = 2^{2k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} 2^{2j}$$

De là,

$$\begin{aligned} T(m_q) &= \sum_{k=1}^{2q} m_q \odot 2^k \\ &= \sum_{j=1}^q (m_q \odot 2^{2j-1} + m_q \odot 2^{2j}) \\ &= \sum_{j=1}^q 2^{2j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} 2^{2j+1} \\ &= \frac{2}{3}2^{2q} - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Le majorant pour p pair est donc atteint. Passons maintenant à n_q . On a

$$\begin{aligned} T(n_q) &= T(m_q + 2^{2q+1}) \\ &= \sum_{k=1}^{2q} m_q \odot 2^k + m_q \odot 2^{2q+1} \\ &= T(m_q) + m_q \odot 2^{2q+1} \\ &= \frac{2}{3}2^{2q} - \frac{2}{3} + 2^{2q+1} - m_q \\ &= \frac{2}{3}2^{2q} - \frac{2}{3} + 2^{2q+1} - \frac{1}{3}(4^{q+1} - 1) \\ &= \frac{2}{3}2^{2q} - \frac{2}{3} + 2 \times 2^{2q} - \frac{4}{3}2^{2q} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}2^{2q+1} - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

□

Le majorant pour p impair est donc aussi atteint.