

La fonction de Takagi

Marc Lorenzi

16 octobre 2022

Résumé

La fonction τ de Takagi a été introduite en 1903 par Teiji Takagi comme un exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Sa courbe possède des propriétés d'autosimilarité qui en font un objet de type « fractal ». Nous allons dans cet article construire la fonction τ et montrer sa continuité. Nous ne prouverons pas ici la non-dérivabilité de τ . Nous donnerons également un exemple d'autosimilarité de la courbe de la fonction τ .

1 Deux fonctions très simples

Définition 1. On définit pour tout réel x

$$\alpha(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$
$$\delta(x) = |x - \alpha(x)|$$

Lemme 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n = \lfloor x \rfloor$. On a $n \leq x < n + 1$ et donc $n + 1 \leq x + 1 < n + 2$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(x + 1) = \alpha(x) + 1$.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\alpha(x + 1) = \left\lfloor x + 1 + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor + 1 = \alpha(x) + 1$$

$\square$

Proposition 3. δ est 1-périodique.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

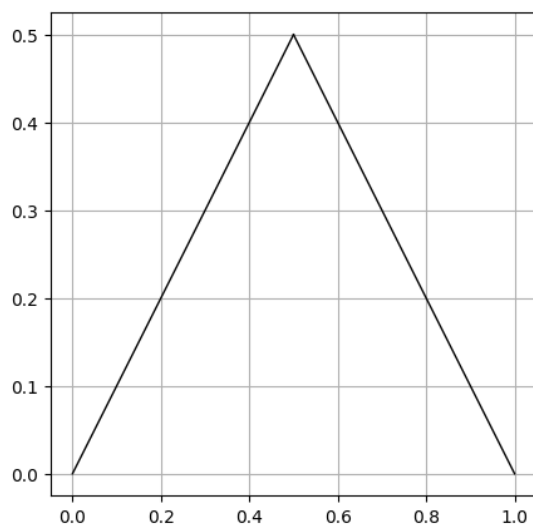
$$\delta(x+1) = |x+1 - \alpha(x+1)| = |x+1 - \alpha(x) - 1| = |x - \alpha(x)| = \delta(x)$$

□

Voici le graphe de δ sur $[0, 1]$. Remarquons que

- Pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $\delta(x) = x$.
- Pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $\delta(x) = 1 - x$.

Remarquons aussi que pour tout réel x , $0 \leq \delta(x) \leq \frac{1}{2}$.



2 La fonction τ

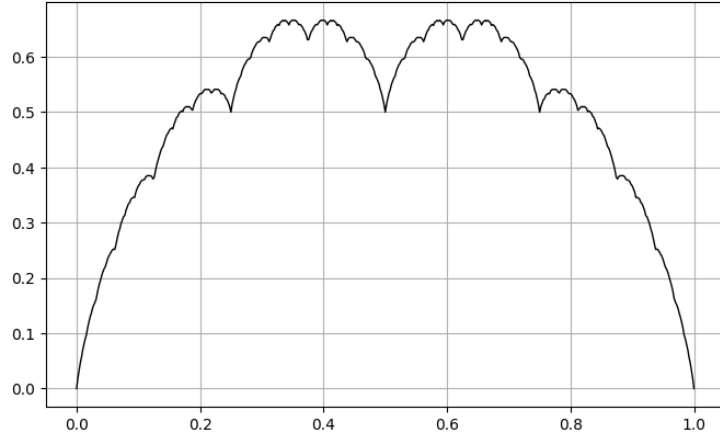
2.1 Une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\tau_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$\tau_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta(2^k x)}{2^k}$$

Tout comme δ , τ_n est continue, et 1-périodique.

Voici le graphe de τ_{20} sur $[0, 1]$.



Proposition 4. *Pour tout réel x , la suite $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\tau_n(x) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{2(1 - \frac{1}{2})} \leq 1$$

La suite $(\tau_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée par 1. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_{n+1}(x) - \tau_n(x) = \frac{\delta(2^{n+1}x)}{2^{n+1}} \geq 0$$

Ainsi, la suite $(\tau_n(x))_{n \geq 0}$ est croissante. Étant majorée, cette suite converge. $\square$

2.2 La fonction de Takagi

Définition 2. La *fonction de Takagi* est la fonction $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie tout réel x par

$$\tau(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(x)$$

Proposition 5. *La fonction τ est de période 1.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tau_n(x+1) = \tau_n(x)$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\tau(x+1) = \tau(x)$$

$\square$

Remarque. Les calculs du paragraphe précédent montrent que pour tout réel x , $0 \leq \tau(x) \leq 1$. Nous verrons plus loin qu'on peut faire mieux, et que le maximum de τ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{2}{3}$.

2.3 La continuité de τ

Proposition 6. *La fonction τ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n < m$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} |\tau_m(x) - \tau_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\delta(2^k x)}{2^k} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2^{m-n}} \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

En faisant tendre m vers l'infini, on obtient

$$|\tau(x) - \tau_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. La fonction τ_n est continue en a . Il existe donc $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| \leq \alpha \implies |\tau_n(x) - \tau_n(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - a| \leq \alpha$. On a

$$\begin{aligned} |\tau(x) - \tau(a)| &= |(\tau(x) - \tau_n(x)) + (\tau_n(x) - \tau_n(a)) + (\tau_n(a) - \tau(a))| \\ &\leq |\tau(x) - \tau_n(x)| + |\tau_n(x) - \tau_n(a)| + |\tau_n(a) - \tau(a)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Remarque. On peut montrer que τ n'est dérivable nulle part. La preuve de ce résultat dépasse le cadre de l'article.

3 Quelques valeurs particulières de τ

3.1 Deux valeurs faciles à calculer

Proposition 7. On a

$$\tau\left(\frac{1}{4}\right) = \tau\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Démonstration. Pour tout $k \geq 2$, $2^{k\frac{1}{4}} \in \mathbb{N}$, et donc $\delta(2^{k\frac{1}{4}}) = 0$. De là, pour tout $n \geq 2$,

$$\tau_n\left(\frac{1}{4}\right) = \tau_1\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\delta(2^{0\frac{1}{4}})}{2^0} + \frac{\delta(2^{1\frac{1}{4}})}{2^1} = \frac{1}{2}$$

Pour $\tau\left(\frac{1}{2}\right)$, c'est encore plus facile. Pour tout $k \geq 1$, $2^{k\frac{1}{2}} \in \mathbb{N}$, et donc $\delta(2^{k\frac{1}{2}}) = 0$. De là, pour tout $n \geq 2$,

$$\tau_n\left(\frac{1}{2}\right) = \tau_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\delta(2^{0\frac{1}{2}})}{2^0} = \frac{1}{2}$$

□

3.2 Un peu plus difficile...

Proposition 8. On a

$$\tau\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette quantité tend vers $\frac{1}{3}$. Si on écrit les nombres en base 2, cela signifie que $0.0101 \dots 01$ (avec $2n$ chiffres après la virgule) tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque n tend vers l'infini. Dit autrement, l'écriture de $\frac{1}{3}$ en base 2 est

$$\frac{1}{3} = 0.010101 \dots$$

Soit $k \in \mathbb{N}$. Une multiplication par 2^k déplace la virgule de k chiffres vers la droite dans le développement de $\frac{1}{3}$ en base 2.

- Si k est pair,

$$2^k \frac{1}{3} = 01 \dots 01.010101 \dots$$

et donc, comme δ est 1-périodique,

$$\delta \left(2^k \frac{1}{3} \right) = \delta(0.010101 \dots) = \delta \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

- Si k est impair,

$$2^k \frac{1}{3} = 01 \dots 010.10101 \dots$$

d'où

$$\delta \left(2^k \frac{1}{3} \right) = \delta(0.10101 \dots) = \delta(2 \times 0.010101 \dots) = \delta \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\begin{aligned} \tau_n \left(\frac{1}{3} \right) &= \sum_{k=0}^n \frac{\delta \left(2^k \frac{1}{3} \right)}{2^k} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

Lorsque n tend vers l'infini, la parenthèse tend vers 1. Ainsi,

$$\tau \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

□

Remarque. Notons

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{2^n} : p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

L'ensemble $\mathbb{D}$ est l'ensemble des *nombre dyadiques*. Cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$. On peut montrer que $\tau(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. De même, $\tau(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.

3.3 Le maximum de τ

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

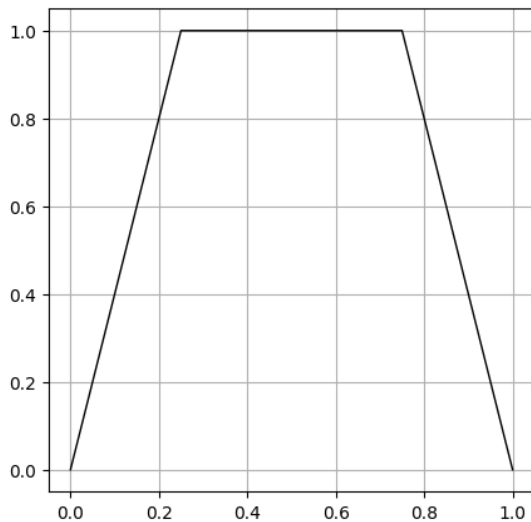
$$f(x) = 2\delta(x) + \delta(2x)$$

La fonction f , tout comme δ , est de période 1. On vérifie facilement que pour tout $x \in [0, 1]$,

- Si $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ alors $f(x) = 4x$.

- Si $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}$ alors $f(x) = 1$.
- Si $\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ alors $f(x) = 4 - 4x$.

De là, pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leq f(x) \leq 1$. Par périodicité, c'est encore vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Voici le graphe de f sur $[0, 1]$.



Proposition 9. *Le maximum de τ sur $\mathbb{R}$ est $\frac{2}{3}$.*

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
 \tau_{2n+1}(x) &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{\delta(2^{2k}x)}{2^{2k}} + \frac{\delta(2^{2k+1}x)}{2^{2k+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} (2\delta(2^{2k}x) + \delta(2^{2k+1}x)) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} f(2^{2k}x) \\
 &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k} \\
 &= \frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{2(1 - \frac{1}{4})} \\
 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right) \\
 &\leq \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\tau(x) \leq \frac{2}{3}$. Ainsi, $\tau(\mathbb{R})$ est majoré par $\frac{2}{3}$. De plus, $\tau(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$, donc $\frac{2}{3} \in \tau(\mathbb{R})$. Finalement,

$$\frac{2}{3} = \max \tau(\mathbb{R})$$

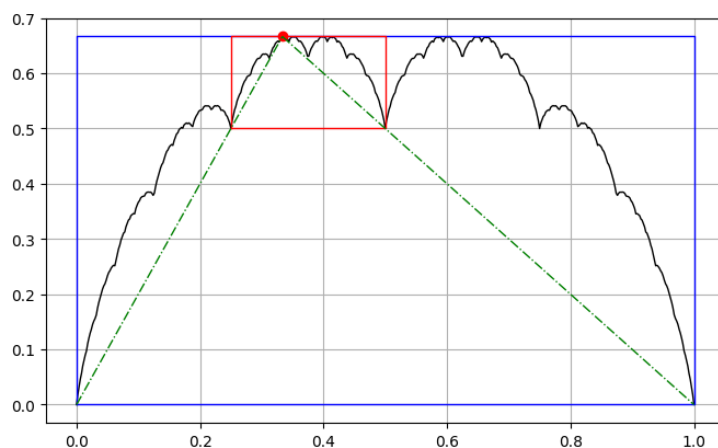
□

4 Similitudes

4.1 Une petite expérience

Certaines parties de la courbe de τ paraissent *semblables* à d'autres. Comme nous allons le voir, le mot « semblables » n'est pas choisi au hasard.

Nous allons nous concentrer sur un exemple. Comparons les graphes de τ sur $[0, 1]$ et sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, encadrés respectivement en bleu et en rouge dans la figure ci-dessous. Les dimensions du cadre bleu sont 4 fois plus grandes que celles du cadre rouge. Le point rouge est le point $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.



4.2 Une homothétie

Nous identifions dans la suite $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$.

Soit $\sigma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la similitude directe définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$\sigma(z) = 4z - 1 - 2i$$

La similitude σ est une homothétie de rapport 4. Son centre ω vérifie

$$\sigma(\omega) = 4\omega - 1 - 2i = \omega$$

On a donc

$$\omega = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i$$

Remarquons que

$$\omega = \frac{1}{3} + i\tau\left(\frac{1}{3}\right)$$

est un point de la courbe de τ . Le point ω est représenté en rouge sur la figure ci-dessus. Les deux traits verts montrent comment le cadre rouge se transforme, via σ , en le cadre bleu.

4.3 Autosimilarité

Définition 3. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, notons $\Gamma_{a,b}$ le graphe de la restriction de τ à $[a, b]$. Par notre identification entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, $\Gamma_{a,b} \subseteq \mathbb{C}$. On a ainsi

$$\Gamma_{a,b} = \{x + i\tau(x) : x \in [a, b]\}$$

Lemme 10. Pour tout réel x ,

$$\tau(4x) = 4\tau(x) - 4\delta(x) - 2\delta(2x)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\tau_n(4x) = \sum_{k=0}^n \frac{\delta(2^{k+2}x)}{2^k} = 4 \sum_{k=0}^n \frac{\delta(2^{k+2}x)}{2^{k+2}}$$

Posons $k' = k + 2$ dans la somme. Il vient

$$\tau_n(4x) = 4 \sum_{k=2}^{n+2} \frac{\delta(2^k x)}{2^k} = 4 \left(\tau_{n+2}(x) - \delta(x) - \frac{\delta(2x)}{2} \right)$$

d'où le résultat en faisant tendre n vers l'infini. $\square$

Proposition 11. $\sigma\left(\Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}\right) = \Gamma_{0,1}$.

Démonstration. Soit $Z \in \sigma\left(\Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}\right)$. Il existe $z \in \Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}$ tel que $Z = \sigma(z)$. On a $z = x + i\tau(x)$ où $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. De là,

$$Z = \sigma(z) = 4(x + i\tau(x)) - 1 - 2i = (4x - 1) + i(4\tau(x) - 2)$$

Posons $x' = 4x - 1$. Facilement, $x' \in [0, 1]$. On a

$$\tau(x') = \tau(4x - 1) = \tau(4x) - 4\delta(x) - 2\delta(2x)$$

Comme $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$, on a $\delta(x) = x$. De plus, $\frac{1}{2} \leq 2x \leq 1$ et donc $\delta(2x) = 1 - 2x$. Ainsi,

$$\tau(x') = 4\tau(x) - 2$$

et donc

$$Z = x' + i\tau(x') \in \Gamma_{0,1}$$

Nous avons donc prouvé que $\sigma\left(\Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}\right) \subseteq \Gamma_{0,1}$.

Inversement, soit $Z \in \Gamma_{0,1}$. Il existe $x' \in [0, 1]$ tel que $Z = x' + i\tau(x')$. Posons $x = \frac{x'+1}{4}$. On a facilement $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Soit $z = x + i\tau(x)$. On a $z \in \Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}$. Les calculs faits pour l'inclusion directe prouvent que $\sigma(z) = Z$. Ainsi, $Z \in \sigma\left(\Gamma_{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}}\right)$, d'où l'inclusion réciproque. $\square$