

Les coefficients binomiaux

Marc Lorenzi

27 octobre 2025

1 Une généralisation des coefficients binomiaux

On se propose de définir les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$. Comme conditions initiales, on impose

- (1) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\binom{n}{0} = 1$.
- (2) Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $\binom{0}{k} = 0$.

On désire aussi que la relation de récurrence

$$(R) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

soit vérifiée pour toutes les valeurs de n et k . Nous allons voir que ces conditions imposent la valeur de $\binom{n}{k}$ pour tous $n, k \in \mathbb{Z}$.

Pour $n, k \in \mathbb{N}$, nous retrouvons les valeurs usuelles des coefficients.

Proposition 1. Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si $n < k$, alors $\binom{n}{k} = 0$.

Démonstration. Faisons une démonstration par récurrence sur n . Par (1) et (2), la propriété est vérifiée pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

- Si $k = 0$, alors la propriété est vérifiée grâce à (1).

- Supposons $k \leq n - 1$. On a alors $k - 1 \leq n - 1$ et $k \leq n - 1$, donc

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \\
 &= \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!} (k + n - k) \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!}
 \end{aligned}$$

- Si $k = n$, alors $k > n - 1$, donc

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
 &= \frac{(n-1)!}{(n-1)!(n-(n-1))!} + 0 \\
 &= 1 \\
 &= \frac{n!}{n!(n-n)!}
 \end{aligned}$$

- Enfin, si $k > n$, alors $k - 1 > n - 1$ et $k > n - 1$, donc

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \\
 &= 0 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Passons maintenant au cas où $n \in \mathbb{N}$ et $k < 0$.

Proposition 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k < 0$, $\binom{n}{k} = 0$.

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{n}{-k} = 0$. Par (2), c'est vrai pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée pour $n - 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\binom{n}{-k} = \binom{n-1}{-k-1} + \binom{n-1}{-k} = 0 + 0 = 0$$

□

Passons maintenant aux entiers n négatifs. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{-n}{k} = \binom{-n+1}{k} - \binom{-n}{k-1}$$

Commençons par examiner le cas $n = -1$.

Lemme 3. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{-1}{k} = (-1)^k$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur k . Par (1), c'est clair pour $k = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $k - 1$. On a alors

$$\binom{-1}{k} = \binom{0}{k} - \binom{-1}{k-1} = 0 - (-1)^{k-1} = (-1)^k$$

□

Passons au cas général $n < 0$ et $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

Démonstration. Faisons une récurrence sur n . Pour $n = 1$, c'est la proposition précédente. Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée pour $n - 1$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

C'est vrai pour $k = 0$ par les conditions initiales. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'égalité vérifiée pour $k - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \binom{-n}{k} &= \binom{-(n-1)}{k} - \binom{-n}{k-1} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-2}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n+k-2}{k-1} \\ &= (-1)^k \left(\binom{n+k-2}{k-1} + \binom{n+k-2}{k} \right) \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

□

Il nous reste à déterminer la valeur de $\binom{n}{k}$ pour $n < 0$ et $k < 0$.

Proposition 5. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n}{-k} = 0$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que ceci est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{-n}{-k} = 0$$

C'est vrai pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\binom{-n}{-k} = 0$. Tout d'abord,

$$\binom{-n}{-1} = \binom{-(n-1)}{0} - \binom{-n}{0} = 1 - 1 = 0$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie pour k . On a alors

$$\binom{-n}{-(k+1)} = \binom{-(n-1)}{-k} - \binom{-n}{-k} = 0 - 0 = 0$$

□

Voici pour terminer un tableau donnant les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $n \in \llbracket -10, 10 \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket$.

La moitié basse du tableau est le triangle de Pascal usuel.

Sans nous occuper des signes, nous voyons que la partie haute du tableau est en fait la partie basse réfléchie et tournée de 45 degrés : les lignes du triangle de Pascal se retrouvent sur les diagonales descendantes de la moitié haute. Ceci est une conséquence directe de la proposition 4.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$
-10	1	-10	55	-220	715	-2002	5005	-11440	24310	-48620	92378
-9	1	-9	45	-165	495	-1287	3003	-6435	12870	-24310	43758
-8	1	-8	36	-120	330	-792	1716	-3432	6435	-11440	19448
-7	1	-7	28	-84	210	-462	924	-1716	3003	-5005	8008
-6	1	-6	21	-56	126	-252	462	-792	1287	-2002	3003
-5	1	-5	15	-35	70	-126	210	-330	495	-715	1001
-4	1	-4	10	-20	35	-56	84	-120	165	-220	286
-3	1	-3	6	-10	15	-21	28	-36	45	-55	66
-2	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	11
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

FIGURE 1 – Les coefficients binomiaux

2 La formule du binôme

Lemme 6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{C}$,*

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{C}$. Montrons l'égalité par récurrence sur n . On a

$$(1+x)^0 = 1 \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que

$$(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(1+x)^n &= (1+x)(1+x)^{n-1} \\
&= (1+x) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^k + \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k \\
&= 1 + x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right) x^k \\
&= 1 + x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k
\end{aligned}$$

□

Corollaire 7. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Si $b = 0$, l'égalité est immédiate. Supposons donc $b \neq 0$. Posons $x = a/b$. On a

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= b^n (1+x)^n \\
&= b^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^n \frac{a^k}{b^k} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}
\end{aligned}$$

□

Nous allons voir que sous certaines conditions, les résultats précédents restent vrais pour $n < 0$. Posons

$$D = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$$

Lemme 8. Pour tout $x \in D$, la série de terme général $\binom{-1}{k}x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) est absolument convergente et

$$(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k$$

Démonstration. Soit $x \in D$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\binom{-1}{k} x^k = (-x)^k$$

La série qui nous intéresse est donc une série géométrique de raison $-x$. Comme $x \in D$, $|-x| < 1$. La série est donc absolument convergente, de somme

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \frac{1}{1+x}$$

□

Lemme 9. Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} = \binom{n+1+k}{k}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons ce résultat par récurrence sur k . C'est immédiat pour $k = 0$. Soit $k \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée par $k - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k \binom{n+j}{j} &= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n+j}{j} + \binom{n+k}{k} \\ &= \binom{n+k}{k-1} + \binom{n+k}{k} \\ &= \binom{n+1+k}{k} \end{aligned}$$

□

Lemme 10. Pour tout $x \in D$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $\binom{-n}{k}x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) est absolument convergente et

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

Démonstration. Soit $x \in D$. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$, il s'agit du lemme précédent. Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$. On a

$$(1 + x)^{-n} = (1 + x)^{-1}(1 + x)^{-(n-1)}$$

Par le lemme précédent et l'hypothèse de récurrence,

$$(1 + x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

et

$$(1 + x)^{-n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n+1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

et les deux séries ci-dessus sont absolument convergentes. Le produit de Cauchy de ces deux séries est donc aussi absolument convergent, de somme $(1 + x)^{-n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k a_{k-j} b_j &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{-n+1}{j} \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} (-1)^j \binom{n-2+j}{j} \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^k \binom{n-2+j}{j} \\ &= (-1)^k \binom{n-1+k}{k} \\ &= \binom{-n}{k} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k$$

□

Corollaire 11. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < |b|$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\binom{-n}{k} a^k b^{-n-k}$ est absolument convergente et

$$(a + b)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} a^k b^{-n-k}$$

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons $|a| < |b|$. On a donc $b \neq 0$ et $x = a/b \in D$. La série de terme général $\binom{-n}{k} x^k$ ($k \in \mathbb{N}$) est donc absolument convergente et

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} a^k b^{-k}$$

On en déduit le résultat en multipliant par b^{-n} . $\square$

Remarque. La proposition 10 peut aussi être démontrée en utilisant la théorie des séries entières. Considérons la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = (1 + z)^{-1}$$

Par le lemme 8, cette fonction est développable en série entière sur D . De là, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est aussi développable en série entière sur D et est obtenue en dérivant terme à terme la série de f . Pour tout $z \in D$,

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1 + z)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k k(k-1) \dots (k-n+1) x^{k-n}$$

ou encore, par un changement d'indice,

$$\frac{(-1)^n n!}{(1 + z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+n} (k+n)(k+n-1) \dots (k+1) x^k$$

Il reste à remarquer que

$$(k+n)(k+n-1) \dots (k+1) = \frac{(k+n)!}{k!} = n! \binom{n+k}{k}$$

En divisant l'égalité par $(-1)^n n!$, on obtient ainsi

$$\frac{1}{(1 + z)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k}{k} x^k$$

ou encore

$$(1 + z)^{-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n-1}{k} x^k$$