

Formule du crible et polynômes symétriques

Marc Lorenzi

2009

Soit E un ensemble fini. Soit A une partie de E . On appelle fonction caractéristique de A la fonction $\chi_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$ et $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$. Les propriétés ci-dessous sont faciles à démontrer :

- $\forall A \subset E, \chi_{E \setminus A} = 1 - \chi_A$.
- $\forall A, B \subset E, \chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$.
- $\forall A \subset E, |A| = \sum_{x \in E} \chi_A(x)$, où $|A|$ désigne le cardinal de l'ensemble A .

Donnons-nous n parties de E , $A_1, A_2, \dots, A_n$. Les lois de Morgan nous permettent d'écrire

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = E \setminus \bigcap_{i=1}^n (E \setminus A_i)$$

Un passage à la fonction caractéristique donne

$$\begin{aligned} \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \chi_{\bigcap_{i=1}^n (E \setminus A_i)} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n \chi_{E \setminus A_i} \\ \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) \end{aligned} \tag{1}$$

Soient maintenant $x_1, \dots, x_n$ n éléments d'un anneau commutatif $\mathbb{A}$. Le polynôme $P = \prod_{i=1}^n (X - x_i) \in \mathbb{A}[X]$ se développe en

$$\begin{aligned} P &= X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \dots + (-1)^n \sigma_n \\ &= X^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k X^{n-k} \end{aligned}$$

où $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ est le k ième polynôme symétrique élémentaire en $x_1, \dots, x_n$. En évaluant le polynôme P en $X = 1$, on obtient

$$\prod_{i=1}^n (1 - x_i) = 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k \tag{2}$$

Revenons à nos ensembles. Appliquons la formule (2) à $x_i = \chi_{A_i}$, $i = 1, \dots, n$. Ceci est une opération parfaitement licite, puisque les fonctions χ_{A_i} sont des éléments de l'anneau commutatif $\mathbb{R}^E$. Nous obtenons

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^k \sigma_k = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sigma_k \tag{3}$$

où $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \dots \chi_{A_{i_k}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}$. On reporte cette valeur dans l'équation (3), ce qui nous donne l'égalité entre fonctions caractéristiques

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}} \tag{4}$$

Il ne nous reste plus qu'à déduire de l'égalité (4) une égalité entre cardinaux. Pour cela, on somme cette égalité sur tous les éléments x de E

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{x \in E} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x) \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \sum_{x \in E} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x) \\
\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \right|
\end{aligned} \tag{5}$$

L'égalité (5) n'est autre que la *formule du crible*.