

développements u -adiques d'un entier naturel

Marc Lorenzi

29 avril 2025

1 Introduction

Si p est un entier naturel non nul, tout entier naturel a s'écrit de façon unique

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$$

où les a_k sont des entiers presque tous nuls appartenant à $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$. La suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est le *développement p -adique* de a . La somme ci-dessus nous dit que a est une combinaison des termes de la suite géométrique $(p^k)_{k \in \mathbb{N}}$ où les coefficients de la combinaison vérifient une condition. La raison pour laquelle on prend les a_k dans l'intervalle $\llbracket 0, p-1 \rrbracket$ est que cette condition assure à la fois l'existence et l'unicité de l'écriture. Si on autorise les a_k à être strictement plus grands que $p-1$, on perd l'unicité. Si on impose aux a_k d'être strictement plus petits que $p-1$, on perd l'existence. Remarquons que la condition imposée aux a_k est équivalente à $a_k p^k < p^{k+1}$. Sous cette forme, nous allons pouvoir généraliser la notion de développement p -adique à des suites autres que des suites géométriques $(p^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Dans tout l'article, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite d'entiers naturels non nuls strictement croissante telle que $u_0 = 1$. Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$.

Définition 1. Soit $a \in \mathbb{N}$. Un *développement u -adique* de a est une suite presque nulle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers naturels telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k u_k < u_{k+1}$ et

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k$$

Les a_k sont les *chiffres* du développement de a .

Si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite presque nulle d'entiers, le *degré* de la suite est

$$\deg(a_k)_{k \in \mathbb{N}} = \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq 0\}$$

en convenant que $\max \emptyset = -\infty$.

Pour tout $a \in \mathbb{N}$, le u -degré de a , que nous noterons $\deg_u a$, est le plus petit des degrés de ses développements (s'il en existe, mais nous verrons que c'est le cas). En particulier, $\deg_u a = -\infty$ si et seulement si $a = 0$.

2 Existence

Proposition 1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $a \in \llbracket 0, u_n - 1 \rrbracket$, a possède un développement u -adique de degré strictement inférieur à n .*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Si $n = 0$, alors $0 \leq a < u_0 = 1$ donc $a = 0$. Il suffit de prendre tous les a_k nuls. On obtient ainsi un u -développement de 0 de degré $-\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée pour n . Soit $a < u_{n+1}$. Si $a < u_n$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence. Supposons donc $u_n \leq a < u_{n+1}$. Effectuons la division euclidienne de a par u_n pour obtenir

$$a = qu_n + r$$

où $q \in \mathbb{N}$ et $r < u_n$. On a

$$qu_n \leq qu_n + r < u_{n+1}$$

Posons $a_n = q$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$r = \sum_{k=0}^{n-1} r_k u_k$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $r_k u_k < u_{k+1}$. En posant $a_k = r_k$, on obtient

$$a = qu_n + r = a_n u_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k = \sum_{k=0}^n a_k u_k$$

□

Corollaire 2. *Tout entier naturel a possède un développement u -adique et $\deg_u a \leq a - 1$.*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}$. On a $a < a + 1 \leq u_a$. Par la proposition 1,

$$a = \sum_{k=0}^{a-1} a_k u_k$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, a-1 \rrbracket$, $a_k u_k < u_{k+1}$ □

En général, il n'y a pas unicité du développement. Prenons par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, les chiffres a_k d'un développement de a vérifient

$$(k+1)a_k < k+2$$

et donc

$$a_k < \frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} \leq 2$$

On a donc $a_k \in \{0, 1\}$. Un développement u -adique de a est ainsi une suite presque nulle $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ telle que

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_k$$

Les développements de a sont ainsi caractérisés par des entiers $1 \leq k_1 < \dots < k_m$ tels que

$$a = k_1 + \dots + k_m$$

Une telle suite est ce que l'on appelle une *partition* de l'entier a (pour être précis, la définition générale d'une partition autorise l'égalité des k_i). Un entier possède en général beaucoup de partitions. Par exemple, 10 possède 10 développements, qui sont

$$10 = 1+2+3+4 = 2+3+5 = 1+4+5 = 1+3+6 = 4+6 = 1+2+7 = 3+7 = 2+8 = 1+9$$

Le développement de plus petit degré est $1 + 2 + 3 + 4$. On a donc $\deg_u 10 = 3$.

3 Unicité (ou pas)

La condition sur les chiffres d'un développement s'écrit aussi $a_k < u_{k+1}/u_k$. Si le quotient u_{k+1}/u_k est entier, c'est à dire si u_k divise u_{k+1} , cette condition s'écrit aussi $a_k \leq u_{k+1}/u_k - 1$, ou encore $a_k u_k \leq u_{k+1} - u_k$. Ainsi, $a_k u_k$ ne peut pas être « trop proche » de u_{k+1} . Nous allons voir que c'est précisément cela qui permet d'assurer l'unicité du u -développement.

Dans la suite nous appellerons « condition de divisibilité » la propriété

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k \text{ divise } u_{k+1}$$

Nous allons d'abord voir que la condition de divisibilité est nécessaire pour avoir l'unicité des développements u -adiques.

Proposition 3. *On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n ne divise pas u_{n+1} . Il existe alors des entiers possédant au moins deux développements u -adiques.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n ne divise pas u_{n+1} . Effectuons la division euclidienne de u_{n+1} par u_n . On a $u_{n+1} = qu_n + r$ où $0 < r < u_n$. Par la proposition 1,

$$r = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k u_k < u_{k+1}$. Comme $r > 0$, on a $qu_n < u_{n+1}$. En posant $a_n = q$, on a donc

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k u_k$$

Ainsi, u_{n+1} possède deux développements distincts, qui sont $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ et $(a_0, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$. $\square$

Montrons maintenant que la condition de divisibilité est suffisante.

Proposition 4. *On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n divise u_{n+1} . Pour tout $a \in \mathbb{N}$, a possède un et un seul u -développement.*

Démonstration. Comme nous l'avons déjà remarqué, les chiffres a_k d'un développement u -adique vérifient $a_k u_k \leq u_{k+1} - u_k$.

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites presque nulles d'entiers telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k u_k \leq u_{k+1} - u_k$, $b_k u_k \leq u_{k+1} - u_k$ et

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k u_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k u_k$$

Supposons ces deux suites distinctes. Notons

$$n = \max\{k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k\}$$

Par exemple, $b_n > a_n$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - b_k) u_k = (b_n - a_n) u_n \geq u_n$$

Par ailleurs,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - b_k) u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a_k u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - 1 < u_n$$

On obtient donc une contradiction. $\square$

Remarque. Supposons que la suite u vérifie la condition de divisibilité. Comme la suite est strictement croissante, $u_{n+1} \geq 2u_n$. De là, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2^n$.

Remarque. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Soit n l'unique entier naturel tel que $2^n \leq a < 2^{n+1}$. Par la remarque précédente, $a < u_{n+1}$, donc

$$\deg a \leq n = \lfloor \lg a \rfloor$$

Exemple 1. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = pu_n$ et donc u_n divise u_{n+1} . Nous retrouvons l'unicité des développements p -adiques dont nous avons parlé dans l'introduction.

Exemple 2. De façon moins standard, nous pouvons également considérer des développements (p, q) -adiques (où $p, q \geq 2$) en prenant $u_0 = 1$, $u_1 = p$, $u_2 = pq$, $u_3 = p^2q$, $u_4 = p^2q^2$ et, plus généralement, $u_{2n} = p^n q^n$ et $u_{2n+1} = p^{n+1} q^n$. La condition de divisibilité étant vérifiée, il y a existence et unicité de tels développements.

Exemple 3. Prenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)!$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+2)u_n$ et donc la condition de divisibilité est vérifiée. Tout entier naturel a s'écrit ainsi de façon unique

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+1)!$$

où les a_k sont presque tous nuls et appartiennent à $\llbracket 0, k+1 \rrbracket$. Pour être plus précis, moyennant un petit changement d'indice, la proposition 1 nous dit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout entier $a < n!$ s'écrit de façon unique

$$a = \sum_{k=1}^{n-1} a_k k!$$

où pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_k \in \llbracket 0, k \rrbracket$. Dans la section suivante, nous allons utiliser cette propriété pour établir une bijection de l'ensemble $\mathfrak{S}_n$ sur $\llbracket 0, n! - 1 \rrbracket$.

4 Permutations

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, la *table d'inversions* de σ est le $(n-1)$ -uplet $I(\sigma) = (a_1, \dots, a_{n-1})$ où pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$a_i = |\{j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket : \sigma(j) > \sigma(i)\}|$$

Notons que $a_i \in \llbracket 0, i \rrbracket$. On a donc

$$I(\sigma) \in E_n = \prod_{i=1}^{n-1} \llbracket 0, i \rrbracket$$

On a donc $I : \mathfrak{S}_n \longrightarrow E_n$. À titre d'exemple, voici les tables d'inversions des permutations de $\mathfrak{S}_4$. Le tableau est ordonné selon l'ordre lexicographique « de droite à gauche » des tables d'inversions. Nous allons voir bientôt pourquoi.

σ	$I(\sigma)$
(0, 1, 2, 3)	(0, 0, 0)
(1, 0, 2, 3)	(1, 0, 0)
(0, 2, 1, 3)	(0, 1, 0)
(2, 0, 1, 3)	(1, 1, 0)
(1, 2, 0, 3)	(0, 2, 0)
(2, 1, 0, 3)	(1, 2, 0)
(0, 1, 3, 2)	(0, 0, 1)
(1, 0, 3, 2)	(1, 0, 1)
(0, 3, 1, 2)	(0, 1, 1)
(3, 0, 1, 2)	(1, 1, 1)
(1, 3, 0, 2)	(0, 2, 1)
(3, 1, 0, 2)	(1, 2, 1)
(0, 2, 3, 1)	(0, 0, 2)
(2, 0, 3, 1)	(1, 0, 2)
(0, 3, 2, 1)	(0, 1, 2)
(3, 0, 2, 1)	(1, 1, 2)
(2, 3, 0, 1)	(0, 2, 2)
(3, 2, 0, 1)	(1, 2, 2)
(1, 2, 3, 0)	(0, 0, 3)
(2, 1, 3, 0)	(1, 0, 3)
(1, 3, 2, 0)	(0, 1, 3)
(3, 1, 2, 0)	(1, 1, 3)
(2, 3, 1, 0)	(0, 2, 3)
(3, 2, 1, 0)	(1, 2, 3)

FIGURE 1 – $I(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$

Proposition 5. *I est une bijection.*

Démonstration. On a $|\mathfrak{S}_n| = |E_n| = n!$. Il suffit donc de montrer, par exemple, l'injectivité de I . Soit $t = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in E_n$. Posons aussi $a_0 = 0$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Supposons que $I(\sigma) = t$. On a

$$a_{n-1} = |\{j \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket : \sigma(j) > \sigma(n-1)\}|$$

et donc $\sigma(n-1) = n-1 - a_{n-1}$. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Supposons déterminés $\sigma(i+1), \dots, \sigma(n-1)$. Il y a a_i entiers $j \in \llbracket 0, i-1 \rrbracket$ tels que $\sigma(j) > \sigma(i)$ et $\sigma(j)$ soit différent de $\sigma(i+1), \dots, \sigma(n-1)$. Considérons l'ensemble

$$A = \llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus \{\sigma(i+1), \dots, \sigma(n-1)\}$$

Cet ensemble possède i éléments. L'entier $\sigma(i)$ est donc le $(i - a_i)$ -ème plus petit élément de A . Ainsi, il existe au plus une permutation σ telle que $I(\sigma) = t$. $\square$

Posons maintenant pour tout $t = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in E_n$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k k!$$

Nous avons vu que $\varphi : E_n \longrightarrow \llbracket 0, n! - 1 \rrbracket$ est une bijection. La composée $\Phi = \varphi \circ I$ est ainsi une bijection de $\mathfrak{S}_n$ sur $\llbracket 0, n! - 1 \rrbracket$.

σ	$I(\sigma)$	$\Phi(\sigma)$
(0, 1, 2, 3)	(0, 0, 0)	0
(1, 0, 2, 3)	(1, 0, 0)	1
(0, 2, 1, 3)	(0, 1, 0)	2
(2, 0, 1, 3)	(1, 1, 0)	3
(1, 2, 0, 3)	(0, 2, 0)	4
(2, 1, 0, 3)	(1, 2, 0)	5
(0, 1, 3, 2)	(0, 0, 1)	6
(1, 0, 3, 2)	(1, 0, 1)	7
(0, 3, 1, 2)	(0, 1, 1)	8
(3, 0, 1, 2)	(1, 1, 1)	9
(1, 3, 0, 2)	(0, 2, 1)	10
(3, 1, 0, 2)	(1, 2, 1)	11
(0, 2, 3, 1)	(0, 0, 2)	12
(2, 0, 3, 1)	(1, 0, 2)	13
(0, 3, 2, 1)	(0, 1, 2)	14
(3, 0, 2, 1)	(1, 1, 2)	15
(2, 3, 0, 1)	(0, 2, 2)	16
(3, 2, 0, 1)	(1, 2, 2)	17
(1, 2, 3, 0)	(0, 0, 3)	18
(2, 1, 3, 0)	(1, 0, 3)	19
(1, 3, 2, 0)	(0, 1, 3)	20
(3, 1, 2, 0)	(1, 1, 3)	21
(2, 3, 1, 0)	(0, 2, 3)	22
(3, 2, 1, 0)	(1, 2, 3)	23

FIGURE 2 – $I(\sigma)$ et $\Phi(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_4$

Remarquons que les entiers $\Phi(\sigma)$ sont classés dans l'ordre croissant. Munissons l'ensemble E_n de l'ordre lexicographique $<$ « de droite à gauche ». Soient $t = (a_1, \dots, a_{n-1})$

et $t' = (b_1, \dots, b_{n-1})$ deux éléments de E_n . Supposons $t < t'$. Il existe donc $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $a_k < b_k$ et pour tout $i \geq k+1$, $a_i = b_i$. On a alors

$$\varphi(t') - \varphi(t) = \sum_{i=1}^k (b_i - a_i) i! \geq k! - \sum_{i=1}^k i! i > 0$$

Ainsi, la fonction φ est strictement croissante.

5 Code Python

5.1 Développements u -adiques

La fonction `developpements` prend en paramètres un entier naturel a , une fonction u (censée représenter la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$) et un entier naturel n . Elle renvoie la liste des développements u -adiques de a de degré inférieur ou égal à n . Comme nous l'avons vu, pour avoir tous les développements de a il suffit de prendre $n = a - 1$. Toutes les listes renvoyées sont de longueur n mais il est facile de supprimer ensuite de ces listes les éventuels zéros finaux.

```
def developpements(a, u, n):
    if n < 0:
        if a == 0: return [[]]
        else: return []
    else:
        ds = []
        for q in range(a // u(n) + 1):
            if q * u(n) >= u(n + 1): break
            b = a - q * u(n)
            ds1 = developpements(b, u, n - 1)
            ds = ds + [s + [q] for s in ds1]
        return ds
```

5.2 Permutations

On représente une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ en Python par la liste $[\sigma(0), \dots, \sigma(n-1)]$. La fonction `table_inversions` prend en paramètre une permutation σ et renvoie sa table d'inversions. Pour des raisons pratiques, si $I(\sigma) = [a_1, \dots, a_{n-1}]$, la fonction renvoie la liste $[0, a_1, \dots, a_{n-1}]$.

```
def table_inversions(s):
    n = len(s)
    t = n * [0]
    for i in range(1, n):
        for j in range(i):
            if s[j] > s[i]: t[i] += 1
    return t
```

La fonction `vers_permutation` effectue l'opération inverse. À partir d'une table d'inversions, elle retrouve la permutation correspondante. Le code suit la preuve de l'injectivité de I .

```

def vers_permutation(t):
    n = len(t)
    s = n * [0]
    A = list(range(n))
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        k = i - t[i]
        s[i] = A[k]
        A = A[:k] + A[k+1:]
    return s

```

La fonction `phi` prend en paramètre une table d'inversions t et renvoie l'entier $\varphi(t)$.

```

def phi(t):
    s = 0
    n = len(t)
    p = 1
    for k in range(1, n):
        s = s + p * t[k]
        p = p * (k + 1)
    return s

```

La fonction `psi` effectue l'opération inverse. Elle prend en paramètre un entier a et renvoie la table d'inversions $t = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in E_n$ telle que $\varphi(t) = a$. L'entier n est choisi minimal, c'est à dire tel que $a_{n-1} \neq 0$. Si l'on désire une table avec un n plus grand, il suffit de rajouter des 0 à la fin de la liste renvoyée.

```

def psi(a):
    p = 1
    n = 1
    while p <= a:
        n = n + 1
        p = p * n
    s = []
    while n != 1:
        p = p // n
        n = n - 1
        s.append(a // p)
        a = a % p
    return [0] + list(reversed(s))

```