

Permanent

Marc Lorenzi

6 juillet 2026

1 Introduction

1.1 Notion de permanent

Définition 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le *permanent* de A est

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} A_{i\sigma(i)}$$

L'expression du permanent ressemble beaucoup à celle du déterminant, puisque

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=0}^{n-1} A_{i\sigma(i)}$$

où $\varepsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ . Nous allons voir que permanent et déterminant partagent certaines propriétés, mais que ce sont deux notions fondamentalement différentes. Nous allons examiner dans cette partie deux problèmes de dénombrement dans lesquels intervient un permanent. Avant cela, il nous faut faire quelques mises au point sur la notion de graphe.

Remarque. Le calcul du permanent de A par la formule de la définition nécessite, pour chaque permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, n multiplications et une addition. Le nombre total d'opérations sur des coefficients de A nécessaire à ce calcul est donc $(n+1) \times n! = (n+1)!$.

1.2 Graphes

Il existe de nombreuses notions de graphe, aussi est-il important de bien définir de quel type de graphe nous parlerons dans la suite.

Une *graphe orienté* est un couple $G = (S, A)$ où

- S est un ensemble fini.
- $A \subseteq S \times S$.

Les éléments de S sont les *sommets* de G . Les éléments de A sont les *arêtes* de G . Si $a = (x, y) \in A$, x est l'*origine* de l'arête a et y est son *extrémité*. Une arête de la forme $a = (x, x)$ est une *boucle* sur le sommet x . Enfin, le sommet y est *adjacent* au sommet x si $(x, y) \in A$. On note alors $x \rightarrow y$. On définit ainsi une relation $\rightarrow$ sur l'ensemble S . On note également $x \leftrightarrow y$ lorsque $x \rightarrow y$ et $y \rightarrow x$.

Le graphe $G = (S, A)$ est *non orienté* (simple) lorsque $\rightarrow$ est antiréflexive et symétrique, c'est à dire

- Pour tout $x \in S$, $x \not\rightarrow x$.

- Pour tous $x, y \in S$, $x \rightarrow y \implies y \rightarrow x$.

Avec nos définitions, un graphe non orienté est donc un type particulier de graphe orienté.

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Énumérons les sommets de G en posant $S = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$, où $n = |S|$. La *matrice d'adjacence* de G est la matrice $M^G \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ définie, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, par $M_{i,j}^G = 1$ si et seulement si $x_i \rightarrow x_j$. Cette matrice dépend de la façon dont on a ordonné les sommets du graphe. Changer la numérotation des sommets de G revient à permuter des lignes et des colonnes de M^G . Lorsque G est non orienté, M^G est symétrique, avec des zéros sur la diagonale.

1.3 Sous-graphes, cycles

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un *sous-graphe* de G est un graphe $G' = (S', A')$ tel que $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$. Remarquons que le fait que G' soit un graphe entraîne que $A' \subseteq S' \times S'$.

Certains sous-graphes d'un graphe sont remarquables : il s'agit des *cycles*. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Soit $k \geq 1$. Un cycle de G de longueur k est un sous-graphe $C = (S', A')$ de G pour lequel $|S'| = k$ et il existe une énumération $S' = \{x_0, \dots, x_{k-1}\}$ des sommets de C telle que

- $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_0$
- Les seules arêtes de C sont les arêtes ci-dessus.

Il existe alors k énumérations de S' ayant les propriétés ci-dessus. À partir d'une énumération de S' , on déduit les $n-1$ autres par des permutations circulaires. Le cas $k=1$ est un peu ambigu. Pour plus de clarté, un cycle de G de longueur 1 est un couple $C = (\{x\}, \{(x, x)\})$ où x est un sommet de G . Remarquons qu'un cycle est entièrement déterminé par ses arêtes $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_{k-1} \rightarrow x_0$. Nous noterons donc sans ambiguïté $C = [x_0, \dots, x_{k-1}]$.

Si C est un cycle, nous appellerons *support* de C l'ensemble de ses sommets.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, « le » *graphe complet* K_n est le graphe non orienté dont l'ensemble des sommets est $S = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $i \neq j$, $i \leftrightarrow j$.

Le graphe K_3 possède 2 cycles de longueur 3 et 3 cycles de longueur 2 qui sont $[0, 1, 2]$, $[2, 1, 0]$, $[0, 1]$, $[0, 2]$ et $[1, 2]$.

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le *graphe bipartite complet* $K_{n,n}$ a pour ensemble de sommets $S = \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket n, 2n-1 \rrbracket$, on a $i \leftrightarrow j$.

Le graphe $K_{2,2}$ possède 2 cycles de longueur 4 et 4 cycles de longueur 2 qui sont $[0, 2, 1, 3]$, $[0, 3, 1, 2]$, $[0, 2]$, $[0, 3]$, $[1, 2]$ et $[1, 3]$.

1.4 Mariages parfaits

Le graphe non orienté $G = (S, A)$ est *bipartite* lorsqu'il existe une partition $S = X \cup Y$ telle que $A \subseteq (X \times Y) \cup (Y \times X)$. On note alors $G = (X, Y, A)$.

Soit $G = (X, Y, A)$ un graphe bipartite tel que $|X| = |Y|$. Ordonnons X et Y en posant $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ et $Y = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$. La *matrice de biadjacence* de G est la matrice $\widehat{M}^G \in \mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ définie par $\widehat{M}_{i,j}^G = 1$ si et seulement si $x_i \rightarrow y_j$. En ordonnant S par

$$S = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\},$$

on a l'égalité

$$M^G = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{M}^G \\ (\widehat{M}^G)^T & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 2. Un *mariage parfait* de G est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $M_{i, \sigma(i)} = 1$.

Dit autrement, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un mariage parfait de G si et seulement si

$$\prod_{i=0}^{n-1} \widehat{M}_{i, \sigma(i)}^G = 1$$

Le nombre de mariages parfaits de G est ainsi

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} \widehat{M}_{i, \sigma(i)}^G$$

c'est à dire le permanent de $\widehat{M}^G$. Nous avons donc un premier exemple de dénombrement dans lequel intervient le permanent d'une matrice.

Exemple. Prenons le graphe bipartite complet $K_{n,n}$. La matrice de biadjacence $\widehat{M}$ de $K_{n,n}$ vérifie pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\widehat{M}_{i,j} = 1$. Le nombre de mariages parfaits de $K_{n,n}$ est donc

$$\text{perm}(\widehat{M}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} 1 = n!$$

1.5 Couvertures par des cycles

Définition 3. Une *couverture du graphe G par des cycles de supports disjoints* est un ensemble de cycles de G dont les supports forment une partition de l'ensemble des sommets de G .

Nous noterons $\mathcal{C}_G$ l'ensemble des couvertures de G .

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Pour simplifier la présentation, posons $S = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ où $n = |S|$. Soit Γ une couverture de G . Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ il existe un unique cycle C tel que i appartienne au support de C . Il existe alors un unique j dans le support de C tel que $i \rightarrow j$. Posons $\sigma_\Gamma(i) = j$. On définit ainsi une application $\sigma_\Gamma : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. En fait, $\sigma_\Gamma \in \mathfrak{S}_n$. En effet, soit $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Il existe un unique cycle C tel que j appartienne au support de C . Il existe alors un unique i dans le support de C tel que $i \rightarrow j$. Ainsi, σ_Γ est bijective.

Nous avons donc défini une application $\Phi : \mathcal{C}_G \rightarrow \mathfrak{S}_n$, définie pour tout $\Gamma \in \mathcal{C}_G$ par $\Phi(\Gamma) = \sigma_\Gamma$.

Proposition 1. La fonction Φ est injective.

Démonstration. Soient $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{C}_G$. Supposons que $\Phi(\Gamma) = \Phi(\Gamma')$. Soit $C = [i_0, \dots, i_{k-1}]$ un cycle de Γ . Il existe un unique $C' \in \Gamma'$ tel que i_0 soit dans le support de C' . On a $\sigma_{\Gamma'}(i_0) = \sigma_\Gamma(i_0) = i_1$ et donc $i_0 \rightarrow i_1$ dans C' . De même, toujours dans C' , $i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_{k-1} \rightarrow i_0$, d'où $C' = C$. Nous venons de montrer que $\Gamma \subseteq \Gamma'$. De là même façon, $\Gamma' \subseteq \Gamma$. $\square$

Proposition 2. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. La permutation σ a un antécédent par Φ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $M_{i, \sigma(i)}^G = 1$.

Démonstration. Supposons que $\sigma = \Phi(\Gamma)$, où $\Gamma \in \mathcal{C}_G$. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. IL existe un unique cycle $C \in \Gamma$ tel que $i \rightarrow j$ dans le cycle C . Mais alors, $i \rightarrow j$ dans le graphe G , donc $M_{i, \sigma(i)}^G = 1$.

Inversement, supposons que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $M_{i, \sigma(i)}^G = 1$. Soient $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_r$ les orbites de σ . Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, définissons un cycle C_k de G dont le support est $\mathcal{O}_k$. En notant ℓ_k le cardinal de $\mathcal{O}_k$ et i_0 un point de $\mathcal{O}_k$, les arêtes de C_k sont $i_0 \rightarrow \sigma(i_0) \rightarrow \dots \rightarrow \sigma^{\ell_k-1}(i_0) \rightarrow i_0$. Par l'hypothèse faite sur σ , ces arêtes sont bien des arêtes de G . Soit enfin $\Gamma = \{C_1, \dots, C_r\}$. L'ensemble Γ est une couverture de G et $\Phi(\Gamma) = \sigma$. $\square$

Proposition 3. *Le nombre de couvertures de G est $\text{perm}(M^G)$.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par la proposition précédente, σ a un (unique) antécédent par Φ si et seulement si $\prod_{i=0}^{n-1} M_{i, \sigma(i)}^G = 1$. Dans le cas contraire, ce produit est nul. D'où le résultat. $\square$

Exemple. Prenons l'exemple du graphe complet K_n . Rappelons que la matrice d'adjacence M de K_n appartient à $\mathcal{M}_n(\{0, 1\})$ et vérifie $M_{i,j} = 1$ si $i \neq j$ et $M_{i,j} = 0$ sinon. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le produit des $M_{i, \sigma(i)}$ est nul dès qu'il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\sigma(i) = i$. Sinon, le produit vaut 1. Appelons *dérangement* de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe. En notant $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements, le nombre de couvertures de G est donc $|\mathcal{D}_n|$. Que vaut ce cardinal? Notons le D_n .

Pour construire une permutation quelconque $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

- On choisit le nombre k de points fixes de σ . Cet entier est un élément de $\llbracket 0, n \rrbracket$.
- On choisit l'ensemble F des points fixes de σ : $\binom{n}{k}$ possibilités.
- On choisit un dérangement de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket \setminus F$: D_{n-k} possibilités.

Ainsi, en posant $k' = n - k$,

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$$

Par la formule d'inversion de Pascal,

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre de couvertures du graphe K_n est

$$n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \sim \frac{1}{e} n!$$

2 Permanent

Nous allons dans cette section donner quelques propriétés (et non-propriétés) du permanent d'une matrice.

2.1 Transposition

Proposition 4. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{perm}(A^T) = \text{perm}(A)$.

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Lorsque i décrit $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sigma(i)$ fait de même. En posant $j = \sigma(i)$, on a donc

$$\prod_{i=0}^{n-1} A_{i, \sigma(i)} = \prod_{j=0}^{n-1} A_{\sigma^{-1}(j), j} = \prod_{j=0}^{n-1} A_{j, \sigma^{-1}(j)}^T$$

De là,

$$\text{perm}(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=0}^{n-1} A_{j, \sigma^{-1}(j)}^T$$

Lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$, σ^{-1} fait de même. En posant $\gamma = \sigma^{-1}$, il vient donc

$$\text{perm}(A) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=0}^{n-1} A_{j, \gamma(j)}^T = \text{perm}(A^T)$$

□

2.2 Permanent d'une matrice triangulaire

Proposition 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire. On a

$$\text{perm}(A) = \prod_{i=0}^{n-1} A_{i,i}$$

Démonstration. Supposons par exemple A triangulaire supérieure. Pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $i > j \implies A_{i,j} = 0$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Si $\prod_{i=0}^{n-1} A_{i, \sigma(i)} \neq 0$, on a donc pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\sigma(i) \leq i$. Une récurrence facile sur i montre que $\sigma = \text{id}$. Ainsi,

$$\text{perm}(A) = \prod_{i=0}^{n-1} A_{i, \text{id}(i)} = \prod_{i=0}^{n-1} A_{i,i}$$

Si A est triangulaire inférieure, alors A^T est triangulaire supérieure. Le résultat reste donc valable. □

2.3 multilinéarité et symétrie

Nous pouvons voir le permanent d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ comme une fonction des n lignes de A :

$$\text{perm} : \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

Si les lignes de A sont $A_0, \dots, A_{n-1}$, nous noterons aussi

$$\text{perm}(A) = \text{perm}(A_0, \dots, A_{n-1})$$

Ceci n'est qu'un simple jeu d'écriture, puisque pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $(A_i)_j = A_{ij}$.

Remarquons que comme le permanent d'une matrice est égal à celui de sa transposée, tout ce que nous allons faire pourrait aussi bien être effectué sur les colonnes des matrices.

Proposition 6. *La fonction perm est n-linéaire.*

Démonstration. Montrons la linéarité en la première ligne de A . La proposition suivante prouve la symétrie du permanent. Nous aurons donc aussi la linéarité en les autres lignes. Soient $A_0, A'_0, A_1, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} \text{perm}(\lambda A_0 + \mu A'_0, A_1, \dots, A_{n-1}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (\lambda A_0 + \mu A'_0)_{\sigma(0)} \prod_{i=1}^{n-1} A_{i, \sigma(i)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A_{0, \sigma(0)} \prod_{i=1}^{n-1} A_{i, \sigma(i)} \\ &\quad + \mu \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} A'_{0, \sigma(0)} \prod_{i=1}^{n-1} A_{i, \sigma(i)} \\ &= \lambda \text{perm}(A_0, A_1, \dots, A_{n-1}) \\ &\quad + \mu \text{perm}(A'_0, A_1, \dots, A_{n-1}) \end{aligned}$$

□

Proposition 7. *Le permanent est symétrique : pour tous $A_0, \dots, A_{n-1} \in \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$ et toute permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$,*

$$\text{perm}(A_{\tau(0)}, \dots, A_{\tau(n-1)}) = \text{perm}(A_0, \dots, A_{n-1})$$

Démonstration. On a

$$\text{perm}(A_{\tau(0)}, \dots, A_{\tau(n-1)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=0}^{n-1} A_{\tau(i), \sigma(i)}$$

Posons $j = \tau(i)$ dans le produit. Lorsque i décrit $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$, j fait de même. Il vient donc

$$\text{perm}(A_{\tau(0)}, \dots, A_{\tau(n-1)}) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=0}^{n-1} A_{j, \sigma\tau^{-1}(j)}$$

Posons maintenant $\gamma = \sigma\tau^{-1}$ dans la somme. Lorsque σ décrit $\mathfrak{S}_n$, $\sigma\tau^{-1}$ fait de même. On obtient donc

$$\text{perm}(A_{\tau(0)}, \dots, A_{\tau(n-1)}) = \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{j=0}^{n-1} A_{j, \gamma(j)} = \text{perm}(A_0, \dots, A_{n-1})$$

□

Exemple. Reprenons l'exemple des mariages parfaits. Soit $G = (X, Y, A)$ un graphe bipartite où X et Y sont de même cardinal. Si $\widehat{M}^G$ est la matrice de biadjacence de G , nous avons vu que le nombre de mariages parfaits de G est égal à $\text{perm}(\widehat{M}^G)$. Considérons maintenant la *matrice d'adjacence* M^G de G . Que vaut $\text{perm}(M^G)$? L'invariance du permanent par permutation de lignes et/ou de colonnes montre que ce permanent ne dépend pas de l'ordre dans lequel on énumère les sommets de G . En posant $X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ et $Y = \{y_0, \dots, y_{n-1}\}$, énumérons l'ensemble $S = X \cup Y$ des sommets de G par

$$S = \{x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1}\}$$

On a alors la décomposition par blocs

$$M^G = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{M}^G \\ (\widehat{M}^G)^T & 0 \end{pmatrix}$$

Par permutation de lignes et de colonnes, on a aussi

$$M^G = \begin{pmatrix} \widehat{M}^G & 0 \\ 0 & (\widehat{M}^G)^T \end{pmatrix}$$

et de là, « facilement »,

$$\text{perm}(M^G) = (\text{perm}(\widehat{M}^G))^2$$

Rappelons-nous maintenant que $\text{perm}(M^G)$ est le nombre de couvertures de G par des cycles. Nous venons donc d'établir une relation entre le nombre de couvertures par des cycles et le nombre de mariages parfaits d'un graphe bipartite.

2.4 La formule de Laplace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tous $i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons $A[i, j]$ la matrice extraite de A en supprimant sa ligne i et sa colonne j .

Proposition 8. *Pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,*

$$\text{perm}(A) = \sum_{i=0}^{n-1} A_{ij} \text{perm}(A[i, j])$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$\text{perm}(A) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} \text{perm}(A[i, j])$$

Démonstration. La première égalité se déduit de la deuxième par transposition. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Posons

$$A_i = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} E_j$$

où $(E_j)_{j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{1n}(\mathbb{K})$. On a, par n -linéarité,

$$\text{perm}(A) = \sum_{j=0}^{n-1} A_{ij} P_{ij}$$

où

$$P_{ij} = \text{perm}(A_0, \dots, A_{i-1}, E_j, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

Par des échanges de lignes et de colonnes (qui ne changent pas la valeur du permanent),

$$P_{ij} = \text{perm} \begin{pmatrix} A[i, j] & B \\ 0_{n-1,1} & 1 \end{pmatrix} = \text{perm}(A')$$

où $B \in \mathcal{M}_{(n-1)1}(\mathbb{K})$. On a

$$\text{perm}(A') = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=0}^{n-1} A'_{k, \sigma(k)}$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, tel que $\sigma(n-1) \neq n-1$, $A'_{n-1, \sigma(n-1)} = 0$ et donc

$$\prod_{k=0}^{n-1} A'_{k, \sigma(k)} = 0$$

De là, comme $A'_{n-1, n-1} = 1$,

$$\begin{aligned} \text{perm}(A') &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(n-1)=n-1} \prod_{k=0}^{n-1} A'_{k, \sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma(n-1)=n-1} \prod_{k=0}^{n-2} A'_{k, \sigma(k)} \\ &= \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{n-1}} \prod_{k=0}^{n-2} A'_{k, \sigma'(k)} \\ &= \text{perm}(A[i, j]) \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité est obtenue en posant $\sigma' = \sigma|_{\llbracket 0, n-2 \rrbracket}$, la restriction de σ à $\llbracket 0, n-2 \rrbracket$. $\square$

2.5 Complexité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Quel est le nombre d'opérations nécessaires au calcul du permanent de A par la formule de Laplace? Notons C_n ce nombre d'opérations. On a $C_1 = 0$. Soit $n \geq 2$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le calcul du permanent de A nécessite

- Le calcul de n permanents de taille $n-1$, et donc nC_{n-1} opérations.
- n additions et n multiplications pour combiner ces permanents.

On a donc

$$C_n = nC_{n-1} + 2n$$

Proposition 9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$C_n = 2n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur n . Pour $n = 0$, la somme est vide, donc vaut 0. Et $C_0 = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée pour $n-1$. On a alors

$$\begin{aligned} C_n &= nC_{n-1} + 2n \\ &= 2n! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + 2n \\ &= 2n! \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) \\ &= 2n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

$\square$

Remarquons que $C_n \sim 2en!$. La formule de Laplace est donc plus efficace que la définition pour calculer un permanent (enfin, disons moins inefficace). Nous verrons plus loin une méthode encore plus efficace, la *formule de Ryser*.

2.6 Dissemblances entre permanent et déterminant

L'algorithme du pivot de Gauss pour le calcul d'un déterminant repose fondamentalement sur le fait qu'en ajoutant à une ligne d'une matrice A un multiple d'une autre ligne, on ne change pas la valeur de $\det(A)$. Cette propriété est une conséquence de l'alternance du déterminant, elle est fautive pour les permanents. Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On a $\text{perm}(A) = 10$. En ajoutant à la première ligne de A la seconde ligne, on obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, de permanent $42 \neq \text{perm}(A)$.

Une autre propriété du déterminant que ne possèdent pas les permanents est la multiplicativité. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\text{perm}(A) = \text{perm}(B) = 10$. En revanche, $AB = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$, d'où $\text{perm}(AB) = 204$ alors que $\text{perm}(A) \times \text{perm}(B) = 100$.

2.7 L'exemple des cycles

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit C_n « le » cycle de longueur n . L'ensemble des sommets de C_n est $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et les arêtes de C_n sont

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow n-1 \leftrightarrow 0$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le sommet i a deux voisins, qui sont $i+1$ et $i-1$ (en opérant modulo n).

Déterminons le nombre de couvertures de C_n , c'est à dire le permanent de sa matrice d'adjacence. On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est quasi-tridiagonale. On a des 0 sur la diagonale, et des 1 au-dessous et au-dessus de la diagonale. Il y a également un 1 ligne 0, colonne $n-1$ et ligne $n-1$, colonne 0.

Exercice. Calculer le permanent de A en utilisant la formule de Laplace.

3 La formule de Ryser

Proposition 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$\text{perm}(A) = \sum_{S \subseteq \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (-1)^{n-|S|} \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in S} A_{i,j}$$

Démonstration. Notons

$$\pi(A) = \sum_{S \subseteq \llbracket 0, n-1 \rrbracket} (-1)^{n-|S|} \prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in S} A_{i,j}$$

Soit $S \subseteq \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On a, en développant,

$$\prod_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in S} A_{i,j} = \sum_{(j_0, \dots, j_{n-1}) \in S^n} \prod_{k=0}^{n-1} A_{k,j_k}$$

De là,

$$\begin{aligned} \pi(A) &= \sum_{S \subseteq \llbracket 0, n-1 \rrbracket} \sum_{(j_0, \dots, j_{n-1}) \in S^n} (-1)^{n-|S|} \prod_{k=0}^{n-1} A_{k,j_k} \\ &= \sum_{(j_0, \dots, j_{n-1}) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^n} \alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1} A_{k,j_k} \end{aligned}$$

où

$$\alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} = \sum_{S \supseteq \{j_0, \dots, j_{n-1}\}} (-1)^{n-|S|}$$

Soit k le cardinal de l'ensemble $\{j_0, \dots, j_{n-1}\}$. Les parties S de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ contenant $\{j_0, \dots, j_{n-1}\}$ sont de cardinaux $k, k+1, \dots, n$. Pour tout $r \in \llbracket k, n \rrbracket$, il y a précisément $\binom{n-k}{r-k}$ telles parties de cardinal r . Ainsi,

$$\alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} = \sum_{r=k}^n (-1)^{n-r} \binom{n-k}{r-k} = (-1)^{n-k} \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^r \binom{n-k}{r}$$

où la deuxième égalité a été obtenue en posant $r' = r - k$. On reconnaît la formule du binôme de Newton. De là,

$$\alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} = (-1)^{n-k} (1-1)^{n-k} = (-1)^{n-k} 0^{n-k}$$

Si $k < n$ alors $\alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} = 0$. Si, au contraire, $k = n$, c'est à dire $j_0, \dots, j_{n-1}$ sont distincts deux à deux, alors $\alpha_{j_0, \dots, j_{n-1}} = 1$. Nous avons donc, en posant

$$E_n = \{(j_0, \dots, j_{n-1}) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^n, \text{ les } j_i \text{ distincts deux à deux}\},$$

$$\pi(A) = \sum_{(j_0, \dots, j_{n-1}) \in E_n} \prod_{k=0}^{n-1} A_{k,j_k}$$

L'application $\Phi : \mathfrak{S}_n \longrightarrow E_n$ définie par $\Phi(\sigma) = (\sigma(0), \dots, \sigma(n-1))$ est une bijection. En posant $(j_0, \dots, j_{n-1}) = \Phi(\sigma)$, on obtient en fin de compte

$$\pi(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{k=0}^{n-1} A_{k, \sigma(k)} = \text{perm}(A)$$

□

3.1 Complexité

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons C_n le nombre d'opérations sur des coefficients de A effectuées lors du calcul de $\text{perm}(A)$. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et chaque ensemble S de cardinal k , la somme $\sum_{j \in S} A_{i,j}$ nécessite k additions. Le produit sur i de ces sommes demande donc nk opérations. Il faut rajouter à cela une addition pour tenir compte de la somme sur S . Comme il y a $\binom{n}{k}$ ensembles S de cardinal k , on obtient

$$C_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (nk + 1) = 2^n + n \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = n2^{n-1}$$

Ainsi,

$$C_n = 2^n + n^2 2^{n-1} = (n^2 + 2)2^{n-1} = O(n^2 2^n)$$

Le gain en temps de la formule de Ryser est donc réel. De plus, en énumérant judicieusement les parties S de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ par des codes de Gray, on peut éviter de recalculer les sommes $\sum_{j \in S} A_{i,j}$ et gagner un facteur n . Au final, le permanent d'une matrice $n \times n$ peut être calculé en temps $O(n2^n)$.