

Permutations qui ont une orbite de longueur 2

Marc Lorenzi

26 novembre 2025

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{A}_{2n}$ l'ensemble des permutations σ appartenant au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{2n}$ qui ont au moins une orbite de longueur 2.

Proposition 1.

$$|\mathcal{A}_{2n}| = (2n)! \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m!}$$

Démonstration. Notons $D = \mathcal{P}_2(\llbracket 1, 2n \rrbracket)$ l'ensemble des parties à deux éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket$.

Pour toute paire $p = \{i, j\} \in D$, soit A_p l'ensemble des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$ pour lesquelles p est une orbite de σ . On a

$$\mathcal{A}_{2n} = \bigcup_{p \in D} A_p$$

Pour tout $m \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons E_m l'ensemble des parties de cardinal m de D . Appliquons la formule du crible pour obtenir

$$|\mathcal{A}_{2n}| = \left| \bigcup_{p \in D} A_p \right| = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \in E_m} |A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}|$$

En posant

$$S_m = \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \in E_m} |A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}|$$

on a donc

$$|\mathcal{A}_{2n}| = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} S_m$$

Remarquons que si p et q sont deux paires distinctes qui ont un élément en commun, alors $A_p \cap A_q = \emptyset$. Pour calculer S_m , on peut donc s'intéresser uniquement à des paires disjointes.

Pour créer un élément de E_m , on choisit $2m$ éléments dans l'ensemble $\llbracket 1, 2n \rrbracket$. Il y a $\binom{2n}{2m}$ possibilités pour faire ce choix. Une fois ces $2m$ éléments choisis, combien peut-on fabriquer avec ceux-ci d'ensembles de m paires disjointes ? Par une récurrence sur m (par exemple), on montre que le nombre de tels ensembles est

$$(2m-1)(2m-3)\dots 3 \cdot 1 = \frac{(2m)!}{2^m m!}$$

Le cardinal de E_m est donc

$$|E_m| = \binom{2n}{2m} \frac{(2m)!}{2^m m!} = \frac{(2n)!}{2^m m! (2n - 2m)!}$$

Ayant fixé $\{p_1, \dots, p_m\} \in E_m$, un élément $\sigma \in A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}$ est caractérisé par une permutation des $2n - 2m$ éléments de $\llbracket 1, 2n \rrbracket \setminus (p_1 \cup \dots \cup p_m)$. On a donc

$$|A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}| = (2n - 2m)!$$

De là,

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \in E_m} |A_{p_1} \cap \dots \cap A_{p_m}| \\ &= (2n - 2m)! \sum_{\{p_1, \dots, p_m\} \in E_m} 1 \\ &= (2n - 2m)! |E_m| \\ &= \frac{(2n)!}{2^m m!} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\mathcal{A}_{2n}| = \sum_{m=1}^n (-1)^{m-1} \frac{(2n)!}{2^m m!}$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque. Nous nous sommes cantonnés aux groupes symétriques d'ordre pair. On peut reprendre ce qui a été fait dans un groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ quelconque. On obtient alors que le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui ont au moins une orbite de longueur 2 est

$$|\mathcal{A}_n| = n! \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m!}$$

En munissant $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}_n$, on a donc

$$\mathbb{P}_n(\mathcal{A}_n) = \sum_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m!}$$

Lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2^m m!} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^m}{m!} = 1 - e^{-1/2}$$

Cette limite vaut, à 10^{-8} près, 0.39346934. Le tableau ci-dessous donne les premières valeurs des probabilités $\mathbb{P}_n(\mathcal{A}_n)$.

n	$\mathbb{P}_n(\mathcal{A}_n)$
0	0.00000000
1	0.00000000
2	0.50000000
3	0.50000000
4	0.37500000
5	0.37500000
6	0.39583333
7	0.39583333
8	0.39322917
9	0.39322917
10	0.39348958
11	0.39348958
12	0.39346788
13	0.39346788
14	0.39346943
15	0.39346943
16	0.39346934

FIGURE 1 – Quelques valeurs de $\mathbb{P}_n(\mathcal{A}_n)$