

Sommes de coefficients binomiaux

Marc Lorenzi

5 octobre 2025

1. Introduction

Pour tous $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, posons

$$S_r = \sum_{k \equiv r \pmod p} \binom{n}{k}$$

La somme S_r dépend bien entendu aussi de n et p . Lorsque $p = 1$, on a par la formule du binôme

$$S_0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

Pour $p = 2$, il suffit de développer $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$ par la formule du binôme. On obtient facilement que si $n \geq 1$, alors

$$S_0 = S_1 = 2^{n-1}$$

Nous allons généraliser ces résultats pour p quelconque. Notons

$$\omega = \exp \frac{2i\pi}{p}$$

L'ensemble des racines p èmes de l'unité est donc

$$\mathcal{U}_p = \{\omega^k : k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket\}$$

Dans toute la suite nous supposons implicitement que les entiers n et p sont donnés.

2. Le calcul de S_r

Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, posons

$$Z_k = (1 + \omega^k)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \omega^{jk}$$

Le nombre complexe Z_k dépend aussi de n et p .

Proposition 1. Pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$Z_k = \sum_{r=0}^{p-1} \omega^{kr} S_r$$

Démonstration. Soit $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. Soit $j \equiv r[p]$. Écrivons $j = qp + r$ où $q \in \mathbb{N}$. On a alors

$$\omega^{jk} = \omega^{kqp+kr} = (\omega^{kq})^p \omega^{kr} = \omega^{kr}$$

De là,

$$Z_k = \sum_{r=0}^{p-1} \omega^{kr} \sum_{k \equiv r[p]} \binom{n}{k} = \sum_{r=0}^{p-1} \omega^{kr} S_r$$

□

Il reste à inverser ces formules pour obtenir la valeur de S_r .

Proposition 2. Pour tout $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$S_r = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} Z_k$$

Démonstration. Soit $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} Z_k &= \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{s=0}^{p-1} \omega^{-kr} \omega^{ks} S_s \\ &= \sum_{s=0}^{p-1} S_s \sum_{k=0}^{p-1} (\omega^{s-r})^k \end{aligned}$$

Si $r = s$,

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\omega^{s-r})^k = p$$

Sinon, $|s - r| < p$, donc $\omega^{s-r} \neq 1$. De là,

$$\sum_{k=0}^{p-1} (\omega^{s-r})^k = \frac{(\omega^{s-r})^p - 1}{\omega^{s-r} - 1} = 0$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} Z_k = p S_r$$

□

3. Un cas particulier

Le cas $p = 3$ est intéressant. Les valeurs des trois sommes S_0 , S_1 et S_2 sont dans ce cas particulièrement simples. Voici les premières valeurs de ces sommes.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_0	1	1	1	2	5	11	22	43	85	170	341
S_1	0	1	2	3	5	10	21	43	86	171	341
S_2	0	0	1	3	6	11	21	42	85	171	342

FIGURE 1 – Les sommes S_r pour $p = 3$

Notons plus classiquement $\omega = j$. Soient $k, r \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$. Dans le cas qui nous intéresse, la valeur de Z_k peut être simplifiée. En effet,

$$1 + j + j^2 = 0$$

On a donc

$$\begin{aligned} Z_0 &= 2^n \\ Z_1 &= (1 + j)^n = (-j^2)^n = (-1)^n j^{2n} = (-1)^n \bar{j}^n \\ Z_2 &= (1 + j^2)^n = (-j)^n = (-1)^n j^n \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} 3S_0 &= Z_0 + Z_1 + Z_2 \\ &= 2^n + (-1)^n (\bar{j}^n + j^n) \\ &= 2^n + 2(-1)^n \cos \frac{2n\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3S_1 &= Z_0 + j^{-1}Z_1 + j^{-2}Z_2 \\ &= Z_0 + \bar{j}Z_1 + jZ_2 \\ &= 2^n + (-1)^n (\bar{j}^{n+1} + j^{n+1}) \\ &= 2^n + 2(-1)^n \cos \frac{2(n+1)\pi}{3} \end{aligned}$$

et, en utilisant $j\bar{j} = 1$,

$$\begin{aligned} 3S_2 &= Z_0 + j^{-2}Z_1 + j^{-4}Z_2 \\ &= Z_0 + jZ_1 + \bar{j}jZ_2 \\ &= 2^n + (-1)^n (\bar{j}^{n-1} + j^{n-1}) \\ &= 2^n + 2(-1)^n \cos \frac{2(n-1)\pi}{3} \end{aligned}$$

Les cosinus ne peuvent valoir que 1 et $-1/2$. On obtient facilement les valeurs ci-dessous.

$n \bmod 3$	0	1	2
$3S_0$	$2^n + 2(-1)^n$	$2^n - (-1)^n$	$2^n - (-1)^n$
$3S_1$	$2^n - (-1)^n$	$2^n - (-1)^n$	$2^n + 2(-1)^n$
$3S_2$	$2^n - (-1)^n$	$2^n + 2(-1)^n$	$2^n - (-1)^n$

FIGURE 2 – S_0 , S_1 et S_2

Nous voyons ainsi que, quelle que soit la valeur de n , deux des trois sommes sont égales. De plus, la troisième somme diffère des deux premières de 1. Enfin, pour tout $r \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$,

$$\left| S_r - \frac{2^n}{3} \right| \leq \frac{2}{3}$$

On a donc, lorsque n tend vers l'infini,

$$S_r = \frac{2^n}{3} + O(1)$$

4. Simplifications dans le cas général

Proposition 3. Pour tout $r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$S_r = \frac{2^n}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \cos^n \frac{k\pi}{p} \cos \frac{k(n-2r)\pi}{p}$$

Démonstration. Pour tous $k, r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \omega^{-kr} Z_k &= e^{-2ikr\pi/p} \left(1 + e^{2ik\pi/p} \right)^n \\ &= e^{-2ikr\pi/p} \left(2e^{ik\pi/p} \cos \frac{k\pi}{p} \right)^n \\ &= 2^n \cos^n \frac{k\pi}{p} e^{ik(n-2r)\pi/p} \end{aligned}$$

De là,

$$S_r = \frac{2^n}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \cos^n \frac{k\pi}{p} e^{ik(n-2r)\pi/p}$$

Il reste à remarquer que S_r est réel, et donc égal à sa partie réelle. $\square$

5. Transformée de Fourier discrète

Les relations entre les Z_k et les S_r ont une interprétation matricielle intéressante.

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ définie pour tous $k, r \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ par $A_{k,r} = \omega^{kr}$. Par la proposition ??, on a pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$Z_k = \sum_{r=0}^{p-1} A_{k,r} S_r$$

Ainsi, en posant

$$Z = (Z_0 \dots Z_{p-1})^T$$

et

$$S = (S_0 \dots S_{p-1})^T$$

nous avons

$$Z = AS$$

Remarquons que la matrice A est symétrique. La matrice adjointe de A est donc $\overline{A}^T = \overline{A}$.

Proposition 4. *A est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{p} \overline{A}$$

Démonstration. Soient $r, s \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} (A\overline{A})_{r,s} &= \sum_{k=0}^{p-1} A_{r,k} \overline{A}_{k,s} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{k(r-s)} \end{aligned}$$

Lors de la preuve de la proposition ??, nous avons vu que cette somme vaut 0 si $r \neq s$ et p si $r = s$. Ainsi, $A\overline{A} = pI_p$. $\square$

Corollaire 5.

$$S = \frac{1}{p} \overline{A} Z$$

Démonstration. De $Z = AS$, on tire $S = A^{-1}Z$. $\square$

La matrice

$$U = \frac{1}{\sqrt{p}} A$$

est ainsi une matrice symétrique inversible, et $U^{-1} = \overline{U}$. C'est la matrice de la *transformation de Fourier discrète* et Z est la transformée de Fourier discrète de S .

6. Comportement à l'infini

Nous allons pour terminer examiner le comportement de S_r lorsque n tend vers $+\infty$.

Proposition 6.

$$\left| S_r - \frac{2^n}{p} \right| \leq \frac{p-1}{p} \left(2 \cos \frac{\pi}{p} \right)^n$$

Démonstration. On a

$$S_r = \frac{2^n}{p} + \frac{2^n}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \cos^n \frac{k\pi}{p} \cos \frac{k(n-2r)\pi}{p}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$,

$$\left| \cos \frac{k\pi}{p} \right| \leq \cos \frac{\pi}{p}$$

On en déduit

$$\left| \sum_{k=1}^{p-1} \cos^n \frac{k\pi}{p} \cos \frac{k(n-2r)\pi}{p} \right| \leq (p-1) \cos^n \frac{\pi}{p}$$

Ainsi,

$$\left| S_r - \frac{2^n}{p} \right| \leq \frac{p-1}{p} 2^n \cos^n \frac{\pi}{p}$$

d'où le résultat. $\square$

Corollaire 7. Lorsque n tend vers l'infini,

$$S_r \sim \frac{2^n}{p}$$

Démonstration. Par la proposition précédente,

$$\left| \frac{p}{2^n} S_r - 1 \right| \leq (p-1) \cos^n \frac{\pi}{p}$$

Si $p = 1$, le majorant est nul. Sinon, $|\cos \pi/p| < 1$ donc le majorant tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. $\square$

Remarque. Contrairement au cas $p = 3$, pour $p \geq 4$ la quantité $S_r - 2^n/p$ n'est pas bornée.