

# Nombres de Stirling

Marc Lorenzi

27 avril 2023

## Table des matières

|          |                                                                      |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Nombres de Stirling de première espèce</b>                        | <b>2</b>  |
| 1.1      | Rappels, notations . . . . .                                         | 2         |
| 1.2      | Nombres de Stirling . . . . .                                        | 2         |
| 1.3      | Une relation de récurrence . . . . .                                 | 4         |
| 1.4      | Puissances montantes . . . . .                                       | 5         |
| 1.5      | Puissances descendantes . . . . .                                    | 7         |
| <b>2</b> | <b>Nombres de Stirling de deuxième espèce</b>                        | <b>8</b>  |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                               | 8         |
| 2.2      | Une relation de récurrence . . . . .                                 | 9         |
| 2.3      | Puissances montantes et descendantes . . . . .                       | 11        |
| 2.4      | Une relation entre les deux espèces de nombres de Stirling . . . . . | 12        |
| <b>3</b> | <b>Les nombres de Lah</b>                                            | <b>13</b> |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                               | 13        |
| 3.2      | Partitions ordonnées . . . . .                                       | 13        |
| 3.3      | L'expression des nombres de Lah . . . . .                            | 14        |
| 3.4      | Puissances montantes et descendantes . . . . .                       | 16        |
| 3.5      | Nombres de Lah et nombres de Stirling . . . . .                      | 17        |
| 3.6      | La série génératrice des nombres de Lah . . . . .                    | 18        |
| 3.7      | Nombres de Lah et exponentielle . . . . .                            | 20        |
| <b>4</b> | <b>Surjections</b>                                                   | <b>20</b> |
| 4.1      | Surjections et nombres de Stirling . . . . .                         | 20        |
| 4.2      | Une autre formule . . . . .                                          | 21        |
| <b>5</b> | <b>Nombres de Bell</b>                                               | <b>24</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .                                               | 24        |
| 5.2      | Une relation de récurrence . . . . .                                 | 24        |
| 5.3      | La série génératrice des nombres de Bell . . . . .                   | 25        |
| 5.4      | Une minoration de $B_n$ . . . . .                                    | 28        |
| <b>6</b> | <b>Le triangle de Bell</b>                                           | <b>30</b> |
| 6.1      | Partitions et singletons . . . . .                                   | 30        |
| 6.2      | La série génératrice de $V_n$ . . . . .                              | 31        |
| 6.3      | Singleton maximal d'une partition . . . . .                          | 32        |

|     |                                                                                        |    |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.4 | Une relation de récurrence . . . . .                                                   | 33 |
| 6.5 | Le calcul des $\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rangle$ . . . . . | 34 |

## Table des figures

|   |                                                                                                                  |    |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1 | Nombres de Stirling de première espèce $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$ . . . . .   | 5  |
| 2 | Nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ . . . . . | 10 |
| 3 | Nombres de Lah . . . . .                                                                                         | 16 |
| 4 | Nombres de surjections $S_{nk}$ . . . . .                                                                        | 21 |
| 5 | Nombres de Bell . . . . .                                                                                        | 25 |
| 6 | Les nombres $\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rangle$ . . . . .                             | 35 |

# 1 Nombres de Stirling de première espèce

## 1.1 Rappels, notations

Pour tous  $a, b \in \mathbb{N}$ , on note

$$\llbracket a, b \rrbracket = \{k \in \mathbb{N} : a \leq k \leq b\}$$

En particulier, si  $a > b$ ,  $\llbracket a, b \rrbracket = \emptyset$ .

Si  $E$  est un ensemble fini,  $|E|$  désigne le cardinal de  $E$ .

## 1.2 Nombres de Stirling

Soit  $E$  un ensemble fini. Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}(E)$  et tout  $a \in E$ , l'orbite de  $a$  suivant  $\sigma$  est l'ensemble

$$\mathcal{O}_\sigma(a) = \{\sigma^i(a) : i \in \mathbb{Z}\}$$

Les orbites de  $\sigma$  forment une *partition* de  $E$  : elles sont non vides, disjointes deux à deux, et leur réunion est  $E$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , nous noterons  $\mathfrak{S}_k(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$  possédant  $k$  orbites.

**Définition 1.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Le *nombre de Stirling de première espèce*  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  est le cardinal de  $\mathfrak{S}_k(E)$ , où  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ .

Nous aurons dans la suite de l'article plusieurs définitions d'entiers qui dépendent apparemment d'un ensemble  $E$ . En réalité, ces entiers ne dépendent pas réellement de  $E$  mais seulement de son cardinal. Montrons-le pour les nombres de Stirling de première espèce.

**Proposition 1.** *L'entier  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  ne dépend que de  $n$  et de  $k$ , et pas de l'ensemble  $E$ .*

**Démonstration.** Soient  $E$  et  $E'$  deux ensembles finis de même cardinal  $n$ . Soit  $f : E \rightarrow E'$  une bijection. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_k(E)$ . Soit  $\sigma' = f \circ \sigma \circ f^{-1}$ . En tant que composée de bijections,  $\sigma' \in \mathfrak{S}(E')$ . De plus, pour tout  $a \in E$ ,  $f(\mathcal{O}_\sigma(a)) = \mathcal{O}_{\sigma'}(f(a))$ . Ainsi,  $f$  est une bijection de l'ensemble des orbites de  $\sigma$  sur l'ensemble des orbites de  $\sigma'$  et donc, tout comme  $\sigma$ ,  $\sigma'$  possède  $k$  orbites. Enfin, l'application  $\Phi : \mathfrak{S}_k(E) \rightarrow \mathfrak{S}_k(E')$  définie par  $\Phi(\sigma) = \sigma'$  est une bijection. Ainsi,  $|\mathfrak{S}_k(E)| = |\mathfrak{S}_k(E')|$ .  $\square$

Regardons maintenant quelques valeurs particulières des nombres de Stirling de première espèce.

**Proposition 2.** *Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .*

- Si  $n < k$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ .
- $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ .

**Démonstration.**

- Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Notons  $O_1, \dots, O_k$  les orbites distinctes, et donc disjointes, de  $\sigma$ . On a

$$\llbracket 1, n \rrbracket = \bigcup_{i=1}^k O_i$$

De là,

$$n = |\llbracket 1, n \rrbracket| = \sum_{i=1}^k |O_i| \geq k$$

Si  $k > n$ , on a donc  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = 0$ .

- Supposons  $n \geq 1$ . Une permutation de  $\mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  a au moins une orbite, donc  $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ .
- La seule permutation de  $\mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  ayant  $n$  orbites est  $id$ , et donc  $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ .
- Supposons  $n \geq 2$ . Les permutations de  $\mathfrak{S}_1(\llbracket 1, n \rrbracket)$  sont les  $n$ -cycles. Il y en a  $(n-1)!$ . On a donc  $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ . Comme  $\mathfrak{S}_1(\{1\}) = \{id\}$ , on a  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 = 0!$ .

$\square$

**Proposition 3.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a*

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!$$

**Démonstration.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . On a

$$\mathfrak{S}(E) = \bigcup_{k=0}^n \mathfrak{S}_k(E)$$

Cette union est disjointe, donc

$$|\mathfrak{S}(E)| = \sum_{k=0}^n |\mathfrak{S}_k(E)|$$

d'où le résultat.  $\square$

### 1.3 Une relation de récurrence

Les nombres de Stirling de première espèce vérifient des relations de récurrence analogues à celles des coefficients binomiaux.

**Proposition 4.** *Pour tous entiers  $n, k \geq 1$ ,*

$$\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

**Démonstration.** Écrivons

$$\mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n \rrbracket) = \mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket) \cup \mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

où  $\mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$  est l'ensemble des permutations dont l'orbite de  $n$  est  $\{n\}$  et

$$\mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket) = \mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n \rrbracket) \setminus \mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$$

- Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Comme  $\sigma(n) = n$ , la permutation  $\sigma$  induit une permutation  $\sigma' \in \mathfrak{S}_{k-1}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ . La fonction  $\sigma \mapsto \sigma'$  est une bijection de  $\mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$  sur  $\mathfrak{S}_{k-1}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ . Ainsi,

$$|\mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| = |\mathfrak{S}_{k-1}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)| = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]$$

- Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Soient  $p = \sigma^{-1}(n)$  et  $q = \sigma(n)$ . Remarquons que  $n, p$  et  $q$  appartiennent à la même orbite suivant  $\sigma$  et  $p, q \neq n$  (il est possible, en revanche, d'avoir  $p = q$ ). Soit  $\sigma' : \llbracket 1, n-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  définie par  $\sigma'(p) = q$  et pour tout  $x \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  différent de  $p$ ,  $\sigma'(x) = \sigma(x)$ . Clairement,  $\sigma' \in \mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ . L'application  $\sigma \mapsto (p, \sigma')$  est alors une bijection de  $\mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket)$  sur  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket \times \mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ . Ainsi,

$$|\mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| = |\llbracket 1, n-1 \rrbracket| \times |\mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)| = (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

Pour conclure,

$$|\mathfrak{S}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| = |\mathfrak{S}'_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| + |\mathfrak{S}''_k(\llbracket 1, n \rrbracket)| = \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n-1) \left[ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]$$

□

Cette relation de récurrence permet de calculer les nombres de Stirling de première espèce. Voici  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  pour  $0 \leq n, k \leq 9$ .

| $n$ | $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 9 \end{bmatrix}$ |
|-----|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| 0   | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 1   | 0                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 2   | 0                                      | 1                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 3   | 0                                      | 2                                      | 3                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 4   | 0                                      | 6                                      | 11                                     | 6                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 5   | 0                                      | 24                                     | 50                                     | 35                                     | 10                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 6   | 0                                      | 120                                    | 274                                    | 225                                    | 85                                     | 15                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 7   | 0                                      | 720                                    | 1764                                   | 1624                                   | 735                                    | 175                                    | 21                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      |
| 8   | 0                                      | 5040                                   | 13068                                  | 13132                                  | 6769                                   | 1960                                   | 322                                    | 28                                     | 1                                      | 0                                      |
| 9   | 0                                      | 40320                                  | 109584                                 | 118124                                 | 67284                                  | 22449                                  | 4536                                   | 546                                    | 36                                     | 1                                      |

FIGURE 1 – Nombres de Stirling de première espèce  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$

## 1.4 Puissances montantes

Plaçons-nous dans l'algèbre  $\mathbb{C}[X]$  des polynômes à une indéterminée  $X$ .

**Définition 2.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La  $n^{\text{e}}$  puissance montante de  $X$  est

$$X^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (X + k)$$

Remarquons que  $X^{\overline{0}} = 1$  et  $X^{\overline{1}} = X$ .

**Proposition 5.** La famille  $(X^{\overline{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$ .

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg X^{\overline{n}} = n$ . □

Voici les premières valeurs de  $X^{\overline{n}}$ .

$$\begin{aligned} X^{\overline{0}} &= 1 \\ X^{\overline{1}} &= X \\ X^{\overline{2}} &= X + X^2 \\ X^{\overline{3}} &= 2X + 3X^2 + X^3 \\ X^{\overline{4}} &= 6X + 11X^2 + 6X^3 + X^4 \\ X^{\overline{5}} &= 24X + 50X^2 + 35X^3 + 10X^4 + X^5 \end{aligned}$$

**Proposition 6.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$$

**Démonstration.** Montrons cette égalité par récurrence sur  $n$ . Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} X^k = X^0 = 1 = X^{\bar{0}}$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons l'égalité vraie pour  $n-1$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \right) X^k \\ &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} X^k + (n-1) \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &= S' + (n-1)S'' \end{aligned}$$

En posant  $k' = k-1$ , il vient

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^{k+1} \stackrel{(HR)}{=} X X^{\overline{n-1}}$$

De plus,

$$\begin{aligned} S'' &= \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &= \begin{bmatrix} n-1 \\ n \end{bmatrix} X^n - \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} X^k \\ &\stackrel{(HR)}{=} - \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + X^{\overline{n-1}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k &= X X^{\overline{n-1}} + (n-1) \left( - \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} + X^{\overline{n-1}} \right) \\ &= (X + n-1) X^{\overline{n-1}} - (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= X^{\bar{n}} \end{aligned}$$

□

## 1.5 Puissances descendantes

**Définition 3.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . La  $n^{\text{e}}$  puissance descendante de  $X$  est

$$X^{\overline{n}} = \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$$

Remarquons que  $X^{\overline{0}} = 1$  et  $X^{\overline{1}} = X$ .

**Proposition 7.** La famille  $(X^{\overline{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[X]$ .

**Démonstration.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\deg X^{\overline{n}} = n$ .  $\square$

Voici les premières valeurs de  $X^{\overline{n}}$ .

$$\begin{aligned} X^{\overline{0}} &= 1 \\ X^{\overline{1}} &= X \\ X^{\overline{2}} &= -X + X^2 \\ X^{\overline{3}} &= 2X - 3X^2 + X^3 \\ X^{\overline{4}} &= -6X + 11X^2 - 6X^3 + X^4 \\ X^{\overline{5}} &= 24X - 50X^2 + 35X^3 - 10X^4 + X^5 \end{aligned}$$

**Lemme 8.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(-X)^{\overline{n}} = (-1)^n X^{\overline{n}}$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} (-X)^{\overline{n}} &= (-X)(-X+1)\dots(-X+n-1) \\ &= (-1)^n X(X-1)(X-n+1) \\ &= (-1)^n X^{\overline{n}} \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 9.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Dans l'égalité de la proposition 6, remplaçons  $X$  par  $-X$ . Il vient

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k = (-X)^n = (-1)^n X^n$$

□

## 2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

### 2.1 Introduction

Nous avons déjà parlé de partitions à propos des orbites d'une permutation. Rappelons précisément ce qu'est une *partition* d'un ensemble.

**Définition 4.** Soit  $E$  un ensemble. Une *partition* de  $E$  est un ensemble  $P$  de parties de  $E$  vérifiant

- Pour tout  $A \in P$ ,  $A \neq \emptyset$ .
- Pour tous  $A, B \in P$ ,  $A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$ .
- $\bigcup_{A \in P} A = E$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Une  $k$ -*partition* de  $E$  est une partition de  $E$  qui est finie, de cardinal  $k$ .

Nous noterons  $\text{Part}(E)$  l'ensemble des partitions de  $E$  et  $\text{Part}_k(E)$  l'ensemble des  $k$ -partitions de  $E$ .

**Exemple.** Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . Les partitions de  $E$  sont

$$\{\{1, 2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

L'ensemble  $E$  possède donc 5 partitions. On a

$$\begin{aligned} \text{Part}_1(E) &= \{\{\{1, 2, 3\}\}\} \\ \text{Part}_2(E) &= \{\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}\} \\ \text{Part}_3(E) &= \{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}\} \end{aligned}$$

et pour tout  $k \neq 1, 2, 3$ ,  $\text{Part}_k(E) = \emptyset$ .

Notons le cas particulier où  $E$  est vide. On a

$$\text{Part}_0(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

et pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\text{Part}_k(\emptyset) = \emptyset$$

**Définition 5.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . Le *nombre de Stirling de deuxième espèce*  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  est le cardinal de  $\text{Part}_k(E)$ , où  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ .



L'entier  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  ne dépend que de  $n$  et de  $k$ , et pas de l'ensemble  $E$  choisi pour dénombrer les  $k$ -partitions.

**Proposition 10.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ .

- Si  $k > n$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ .
- $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ .

**Démonstration.**

- Supposons que  $\llbracket 1, n \rrbracket$  possède une  $k$ -partition  $P$ . On a

$$n = |\llbracket 1, n \rrbracket| = \left| \bigcup_{A \in P} A \right| = \sum_{A \in P} |A| \geq \sum_{A \in P} 1 = |P| = k$$

On en déduit, en contraposant, que si  $k > n$  alors  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ne possède pas de  $k$ -partition.

- Supposons  $n \geq 1$ . Toute partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $n$  possède au moins un élément, donc  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ .
- Reprenons le calcul fait au premier point en supposant qu'un ensemble  $A_0 \in P$  possède au moins deux éléments. On a alors

$$n = |\llbracket 1, n \rrbracket| = \left| \bigcup_{A \in P} A \right| = \sum_{A \in P} |A| = |A_0| + \sum_{A \neq A_0} |A| \geq 2 + |P| - 1 = k + 1$$

Ainsi,  $k < n$ . En contraposant, on obtient qu'une  $n$ -partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ne contient que des singletons. Inversement,  $P = \{\{k\} : k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$  est une  $n$ -partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Ainsi,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$ . Rappelons que si  $n = 0$ , alors  $\llbracket 1, n \rrbracket = \emptyset$ . Or,  $\emptyset$  a une unique 0-partition qui est  $\{\}$ . Le résultat reste donc valable pour  $n = 0$ .

- Supposons  $n \geq 1$ . Il existe une unique 1-partition de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , à savoir  $\{\llbracket 1, n \rrbracket\}$ . Ainsi,  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ .

Remarquons, au sujet du second et du dernier point, que  $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1$  et  $\left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 0$ .  
□

## 2.2 Une relation de récurrence

Tout comme les nombres de Stirling de première espèce, les nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient une relation de récurrence.

**Proposition 11.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$$

**Démonstration.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $a \in E$ . Notons  $F = E \setminus \{a\}$ , de sorte que  $E = F \cup \{a\}$  et  $|F| = n - 1$ . Écrivons

$$Part_k(E) = Part'_k(E) \cup Part''_k(E)$$

où  $Part'_k(E)$  est l'ensemble des  $k$ -partitions de  $E$  ayant  $\{a\}$  comme élément, et

$$Part''_k(E) = Part_k(E) \setminus Part'_k(E)$$

- L'application  $P \mapsto P \cup \{\{a\}\}$  est clairement une bijection de  $Part_{k-1}(F)$  sur  $Part'_k(E)$ , donc

$$|Part'_k(E)| = |Part_{k-1}(F)| = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}$$

- Pour créer un élément de  $Part''_k(E)$ ,
  - On se donne une partition  $P$  de  $Part_k(F)$ .
  - On ajoute  $a$  à un des éléments de  $P$ .
On a  $\left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$  façons de choisir  $P$ . Puis, pour chaque choix de  $P$ , il y a  $k$  façons d'ajouter  $a$  à l'un des éléments de  $P$ . Ainsi,

$$|Part''_k(E)| = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

Finalement,

$$|Part_k(E)| = |Part'_k(E)| + |Part''_k(E)| = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}$$

□

Voici  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  pour  $0 \leq n, k \leq 9$ .

| $n$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 3 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 5 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 6 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 7 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 8 \end{matrix} \right\}$ | $\left\{ \begin{matrix} n \\ 9 \end{matrix} \right\}$ |
|-----|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| 0   | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 1   | 0                                                     | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 2   | 0                                                     | 1                                                     | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 3   | 0                                                     | 1                                                     | 3                                                     | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 4   | 0                                                     | 1                                                     | 7                                                     | 6                                                     | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 5   | 0                                                     | 1                                                     | 15                                                    | 25                                                    | 10                                                    | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 6   | 0                                                     | 1                                                     | 31                                                    | 90                                                    | 65                                                    | 15                                                    | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 7   | 0                                                     | 1                                                     | 63                                                    | 301                                                   | 350                                                   | 140                                                   | 21                                                    | 1                                                     | 0                                                     | 0                                                     |
| 8   | 0                                                     | 1                                                     | 127                                                   | 966                                                   | 1701                                                  | 1050                                                  | 266                                                   | 28                                                    | 1                                                     | 0                                                     |
| 9   | 0                                                     | 1                                                     | 255                                                   | 3025                                                  | 7770                                                  | 6951                                                  | 2646                                                  | 462                                                   | 36                                                    | 1                                                     |

FIGURE 2 – Nombres de Stirling de deuxième espèce  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

### 2.3 Puissances montantes et descendantes

**Proposition 12.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$X^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}}$$

**Démonstration.** Montrons cette égalité par récurrence sur  $n$ . Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^0 \left\{ \begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} = X^{\underline{0}} = 1 = X^0$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons l'égalité vraie pour  $n-1$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \right) X^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \\ &= S' + S'' \end{aligned}$$

En posant  $k' = k-1$  dans  $S'$ , il vient

$$S' = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k+1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (X-k) X^{\underline{k}}$$

De plus,

$$\begin{aligned} S'' &= \sum_{k=1}^n k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \end{aligned}$$

En regroupant le tout, il vient

$$\begin{aligned} S' + S'' &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} (X-k) X^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \\ &= X \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \\ &\stackrel{=(HR)}{=} X X^{n-1} \\ &= X^n \end{aligned}$$

□

**Corollaire 13.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$X^n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\bar{k}}$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Remplaçons  $X$  par  $-X$  dans l'égalité de la proposition 12. Il vient

$$(-1)^n X^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (-X)^k$$

Or,

$$(-X)^k = (-1)^k X^{\bar{k}}$$

d'où le résultat. □

## 2.4 Une relation entre les deux espèces de nombres de Stirling

Pour tous  $m, n \in \mathbb{N}$ , notons  $\delta_{mn}$  le *symbole de Kronecker*. Rappelons que  $\delta_{mn} = 1$  si  $m = n$  et  $\delta_{mn} = 0$  sinon.

**Proposition 14.** *Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] = (-1)^j \delta_{jn}$$

On a

$$\begin{aligned} X^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\bar{k}} \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \left[ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] X^j \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] X^j \\ &= \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=j}^n (-1)^{k-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] \right) X^j \end{aligned}$$

Par l'unicité de l'écriture des polynômes, on a pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\sum_{k=j}^n (-1)^{k-j} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \left[ \begin{matrix} k \\ j \end{matrix} \right] = \delta_{jn}$$

Il reste à remarquer que si  $k < j$ ,  $\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix} = 0$ , d'où le résultat.

### 3 Les nombres de Lah

#### 3.1 Introduction

Les familles  $\mathcal{B} = (X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{B}' = (X^{\bar{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\mathcal{B}'' = (X^{\underline{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  sont trois bases de  $\mathbb{C}[X]$ . Nous avons vu deux formules permettant de passer des vecteurs de  $\mathcal{B}$  aux vecteurs de  $\mathcal{B}'$  et vice versa. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} X^{\bar{n}} &= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k \\ X^n &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\bar{k}} \end{aligned}$$

De même, nous avons vu comment passer des vecteurs de  $\mathcal{B}$  aux vecteurs de  $\mathcal{B}''$  et inversement. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} X^{\underline{n}} &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k \\ X^n &= \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} X^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'il existe des formules permettant de faire des allers-retours entre les vecteurs de  $\mathcal{B}'$  et les vecteurs de  $\mathcal{B}''$ .

#### 3.2 Partitions ordonnées

Soit  $E$  un ensemble fini. Rappelons qu'une partition de  $E$  est un ensemble d'*ensembles* inclus dans  $E$ . Que se passe-t-il si l'on modifie la définition de partition et que l'on considère des ensembles de *suites* d'éléments de  $E$ ?

**Définition 6.** Soit  $E$  un ensemble fini. Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Une *k-partition ordonnée* de  $E$  est un ensemble  $P = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  de suites d'éléments de  $E$  vérifiant

- Pour tout  $i \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ ,  $s_i \neq ()$ .
- Pour tout  $a \in E$ ,  $a$  est un terme d'une, et d'une seule, des suites  $s_i$ .

**Définition 7.** Les *nombres de Lah* sont les entiers  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  où  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  est le nombre de *k-partitions ordonnées* d'un ensemble  $E$  de cardinal  $n$ .

L'entier  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$  ne dépend que de  $k$  et de  $n$ , et pas de l'ensemble  $E$ . Les nombres de Lah sont parfois appelés les *nombre de Stirling de troisième espèce*.

Commençons par donner la valeur de  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$  dans quelques cas particuliers.

**Proposition 15.** *Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ ,*

- $\left\lfloor \frac{0}{0} \right\rfloor = 1$ . Si  $k \geq 1$ ,  $\left\lfloor \frac{0}{k} \right\rfloor = 0$ .
- Si  $n \geq 1$ ,  $\left\lfloor \frac{n}{0} \right\rfloor = 0$ .
- $\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor = n!$ .
- $\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 1$ .
- Si  $n < k$ ,  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 0$ .

- L'ensemble vide possède une unique partition ordonnée qui est  $()$ . Cette partition étant de longueur 0,  $\left\lfloor \frac{0}{0} \right\rfloor = 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  $\left\lfloor \frac{0}{k} \right\rfloor = 0$ .
- Supposons  $n \geq 1$ . Soit  $E$  un ensemble non vide de cardinal  $n$ . Alors,  $E$  ne possède aucune 0-partition ordonnée, donc  $\left\lfloor \frac{n}{0} \right\rfloor = 0$ .
- Soit  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de cardinal  $n$ . Les 1-partitions de  $E$  sont les ensembles  $\{(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})\}$  où  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Il y en a  $n!$ .
- Soit  $E = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de cardinal  $n$ . L'ensemble  $E$  possède une unique  $n$ -partition ordonnée, qui est

$$P = \{(x_1), \dots, (x_n)\}$$

Ainsi,  $\left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor = 1$ .

- Supposons  $n < k$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Les suites d'une partition ordonnée de  $E$  n'ayant pas de termes communs, il n'y a pas de  $k$ -partition de  $E$ . Ainsi,  $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = 0$ .

### 3.3 L'expression des nombres de Lah

Contrairement aux nombres de Stirling de première et deuxième espèce, les nombres de Lah s'expriment à l'aide de nombres déjà connus. Commençons par une relation de récurrence.

**Proposition 16.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,*

$$\left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor + (n+k) \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

**Démonstration.** Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n+1$ . Écrivons  $E = E' \cup \{a\}$  où  $a \in E$  et  $E'$  est de cardinal  $n$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Soit  $P$  une  $k$ -partition ordonnée de  $E$ . Il y a deux possibilités pour  $P$ .

- Cas 1,  $(a)$  est un élément de  $P$ . Pour créer une telle partition, on choisit une  $(k-1)$ -partition ordonnée  $P'$  de  $E'$  ( $\left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor$  possibilités) et on rajoute  $(a)$  à  $P'$ . Il y a donc  $\left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor$  telles partitions.

- Cas 2,  $(a)$  n'est pas un élément de  $P$ . Pour créer une telle partition, on choisit une  $k$ -partition ordonnée  $P' = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  de  $E'$  ( $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  possibilités) et on ajoute  $a$  à l'une des suites de  $P'$ . Pour tout  $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ , notons  $\ell_j$  la longueur de  $s_j$ . Il y a  $1 + \ell_j$  façons d'insérer  $a$  dans  $s_j$ . Le nombre total de possibilités pour insérer  $a$  est donc

$$\sum_{j=0}^{k-1} (1 + \ell_j) = k + \sum_{j=0}^{k-1} \ell_j = k + n$$

Il y a donc  $(n+k) \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  telles partitions.

D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 17.** Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!}$$

**Démonstration.** Montrons le résultat par récurrence sur  $n$ .

On a

$$\lfloor \frac{1}{1} \rfloor = 1 = \binom{0}{0} \frac{1!}{1!}$$

et pour tout  $k \geq 2$ ,

$$\lfloor \frac{1}{k} \rfloor = 0 = \binom{0}{k-1} \frac{1!}{k!}$$

Soit  $n \geq 1$ . Supposons la propriété vraie pour  $n$ . Tout d'abord,

$$\lfloor \frac{n+1}{1} \rfloor = (n+1)! = \binom{n}{0} \frac{(n+1)!}{1!}$$

Soit enfin  $k \geq 2$ . Par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor &= \lfloor \frac{n}{k-1} \rfloor + (n+k) \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \\ &= \binom{n-1}{k-2} \frac{n!}{(k-1)!} + (n+k) \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} \\ &= \binom{n}{k-1} \left( \frac{k-1}{n} \frac{n!}{(k-1)!} + (n+k) \frac{n-k+1}{n} \frac{n!}{k!} \right) \\ &= \binom{n}{k-1} \frac{n!}{k!} \left( k \frac{k-1}{n} + (n+k) \frac{n-k+1}{n} \right) \\ &= \binom{n}{k-1} \frac{n!}{k!} (n+1) \\ &= \binom{n}{k-1} \frac{(n+1)!}{k!} \end{aligned}$$

$\square$

Voici  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$  pour  $n, k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$ .

| $n$ | $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 7 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} n \\ 9 \end{bmatrix}$ |
|-----|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|----------------------------------------|
| 0   | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 1   | 0                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 2   | 0                                      | 2                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 3   | 0                                      | 6                                      | 6                                      | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 4   | 0                                      | 24                                     | 36                                     | 12                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 5   | 0                                      | 120                                    | 240                                    | 120                                    | 20                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 6   | 0                                      | 720                                    | 1800                                   | 1200                                   | 300                                    | 30                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      | 0                                      |
| 7   | 0                                      | 5040                                   | 15120                                  | 12600                                  | 4200                                   | 630                                    | 42                                     | 1                                      | 0                                      | 0                                      |
| 8   | 0                                      | 40320                                  | 141120                                 | 141120                                 | 58800                                  | 11760                                  | 1176                                   | 56                                     | 1                                      | 0                                      |
| 9   | 0                                      | 362880                                 | 1451520                                | 1693440                                | 846720                                 | 211680                                 | 28224                                  | 2016                                   | 72                                     | 1                                      |

FIGURE 3 – Nombres de Lah

### 3.4 Puissances montantes et descendantes

**Proposition 18.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$X^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$$

**Démonstration.** Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^0 \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} X^k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} X^0 = 1 = X^{\bar{0}}$$



Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons l'égalité vérifiée pour  $n$ . On a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} &= \sum_{k=1}^{n+1} \left( \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + (n+k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \right) X^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} X^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^{n+1} (n+k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k+1}} + \sum_{k=1}^{n+1} (n+k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} (X-k) + \sum_{k=1}^{n+1} (n+k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} \\
&= X \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} - \sum_{k=0}^n k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} + \sum_{k=1}^n (n+k) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} \\
&= (X+n) \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\underline{k}} \\
&= (X+n) X^{\overline{n}} \\
&= X^{\overline{n+1}}
\end{aligned}$$

□

**Proposition 19.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\overline{k}}$$

**Démonstration.** Remplaçons  $X$  par  $-X$  dans la proposition précédente. On obtient

$$(-X)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-X)^{\underline{k}}$$

ou encore

$$(-1)^n X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^{\overline{k}}$$

□

### 3.5 Nombres de Lah et nombres de Stirling

**Proposition 20.** Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned}
X^{\overline{n}} &= \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} X^j \\
&= \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \sum_{k=0}^j \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} X^k \\
&= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=k}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \right) X^k \\
&= \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\} \right) X^k
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$X^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} X^k$$

La famille  $(X^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  étant libre, on en déduit le résultat.  $\square$

### 3.6 La série génératrice des nombres de Lah

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , considérons la série entière

$$L_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n!} z^n$$

Remarquons que si  $n < k$ ,  $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor = 0$ , donc on a aussi

$$L_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n!} z^n$$

Dans le cas particulier  $k = 0$  on a, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $L_0(z) = 1$ .

**Proposition 21.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le rayon de convergence de la série  $L_k(z)$  est 1.*

**Démonstration.** Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a pour tout  $n \geq k$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n!} &= \frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \\
&= \frac{(n-1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!k!} \\
&\sim \frac{(n-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}
\end{aligned}$$

De là,

$$\frac{\lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor}{(n+1)!} \frac{n!}{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \sim \frac{n^{k-1}}{(n-1)^{k-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

d'où le résultat par la règle de d'Alembert.  $\square$

Dans la suite, nous noterons  $D$  le disque ouvert de  $\mathbb{C}$  de centre 0 et de rayon 1.

**Proposition 22.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $z \in D$ ,*

$$L_k(z) = \frac{1}{k!} \left( \frac{z}{1-z} \right)^k$$

**Démonstration.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Le résultat est évident si  $k = 0$ . Supposons donc  $k \geq 1$ . La série

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

a pour rayon de convergence 1. La fonction  $f$  est  $k-1$  fois dérivable sur  $D$ . Pour tout  $z \in D$ ,

$$f^{k-1}(z) = \sum_{n=k-1}^{\infty} n^{\overline{k-1}} z^{n-k+1}$$

Par ailleurs, pour tout  $z \in D$ ,

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

et donc, par une récurrence facile,

$$f^{k-1}(z) = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$$

De là,

$$\begin{aligned} \left( \frac{z}{1-z} \right)^k &= \sum_{n=k-1}^{\infty} \frac{n^{\overline{k-1}}}{(k-1)!} z^{n+1} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-1)^{\overline{k-1}}}{(k-1)!} z^n \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} z^n \\ &= k! \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor}{n!} z^n \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

### 3.7 Nombres de Lah et exponentielle

La fonction  $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ . Les nombres de Lah interviennent dans les dérivées successives de  $f$ .

**Proposition 23.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,*

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k}$$

**Démonstration.** Montrons ce résultat par récurrence sur  $n$ . Comme  $\left[ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right] = 1$ , la propriété est vérifiée pour  $n = 0$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons la propriété vérifiée pour  $n$ . Dérivons l'égalité. Il vient, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k} + \sum_{k=0}^n (n+k) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k-1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \left( \sum_{k=0}^n \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k-2} + \sum_{k=0}^n (n+k) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k-1} \right) \end{aligned}$$

Dans la première somme, faisons le changement d'indice  $k' = k + 1$ .

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \left( \sum_{k=1}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] x^{-n-k-1} + \sum_{k=0}^n (n+k) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k-1} \right) \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n+1} \left( \left[ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n+k) \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \right) x^{-n-k-1} \\ &= (-1)^{n+1} e^{\frac{1}{x}} \sum_{k=1}^{n+1} \left[ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right] x^{-n-k-1} \end{aligned}$$

Pour passer de la première à la deuxième ligne, on a utilisé  $\left[ \begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix} \right] = 0$  et  $(n+0) \left[ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$ . Il reste à remarquer que  $\left[ \begin{matrix} n+1 \\ 0 \end{matrix} \right] = 0$  pour obtenir le résultat.  $\square$

## 4 Surjections

### 4.1 Surjections et nombres de Stirling

Pour tous ensembles  $E$  et  $F$  notons  $\mathcal{S}(E, F)$  l'ensemble des surjections de  $E$  sur  $F$ . Notons  $S_{nk}$  le cardinal de  $\mathcal{S}(E, F)$ , lorsque  $E$  et  $F$  sont finis, de cardinaux respectifs  $n$  et  $k$ . Clairement, l'entier  $S_{nk}$  ne dépend que de  $n$  et de  $k$ , et pas des ensembles  $E$  et  $F$ .

**Proposition 24.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . On a

$$S_{nk} = k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

**Démonstration.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles de cardinaux respectifs  $n$  et  $k$ . Soit  $f : E \rightarrow F$  une surjection. La relation  $\sim$  sur  $E$  définie par  $x \sim y$  si et seulement si  $f(x) = f(y)$  est une relation d'équivalence sur  $E$  qui possède  $k$  classes. Elle définit donc une partition de  $E$  de cardinal  $k$ , que nous noterons  $P_f$ . On définit à partir de là une bijection  $\tilde{f}$  de  $P_f$  sur  $F$  définie pour tout  $A \in P_f$  par  $\tilde{f}(A) = f(x)$ , où  $x$  est un élément quelconque de  $A$ .

Pour créer une surjection  $f$  de  $E$  sur  $F$ ,

- On choisit  $P_f$ . Il y a  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  choix possibles.
- On choisit une bijection de  $P_f$  sur  $F$ . Il y a  $k!$  choix possibles.

D'où le résultat.  $\square$

Voici les valeurs de  $S_{nk}$  pour  $0 \leq n, k \leq 8$ .

| $n/k$ | 0 | 1 | 2   | 3    | 4     | 5      | 6      | 7      | 8     |
|-------|---|---|-----|------|-------|--------|--------|--------|-------|
| 0     | 1 | 0 | 0   | 0    | 0     | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 1     | 0 | 1 | 0   | 0    | 0     | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 2     | 0 | 1 | 2   | 0    | 0     | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 3     | 0 | 1 | 6   | 6    | 0     | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 4     | 0 | 1 | 14  | 36   | 24    | 0      | 0      | 0      | 0     |
| 5     | 0 | 1 | 30  | 150  | 240   | 120    | 0      | 0      | 0     |
| 6     | 0 | 1 | 62  | 540  | 1560  | 1800   | 720    | 0      | 0     |
| 7     | 0 | 1 | 126 | 1806 | 8400  | 16800  | 15120  | 5040   | 0     |
| 8     | 0 | 1 | 254 | 5796 | 40824 | 126000 | 191520 | 141120 | 40320 |

FIGURE 4 – Nombres de surjections  $S_{nk}$

## 4.2 Une autre formule

Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $k$ . Une application de  $E$  vers  $F$  « est » une surjection de  $E$  sur  $f(E)$ . Soyons plus précis. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{S} = \bigcup_{G \subseteq F} \mathcal{S}(E, G)$$

Pour toute application  $f \in \mathcal{S}$ ,  $f$  définit de façon évidente une application de  $E$  dans  $F$ . Inversement, si  $f : E \rightarrow F$ , la corestriction de  $f$  à  $f(E)$  appartient à l'ensemble  $\mathcal{S}$ . Nous avons donc une bijection entre les ensembles  $F^E$  et  $\mathcal{S}$ , qui sont donc de même cardinal. Écrivons

$$\mathcal{S} = \bigcup_{j=0}^k \bigcup_{G \in \mathcal{P}_j(F)} \mathcal{S}(E, G)$$

où  $\mathcal{P}_j(F)$  est l'ensemble des parties de  $F$  de cardinal  $j$ . Cette union est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{S}| &= \sum_{j=0}^k \sum_{G \in \mathcal{P}_j(F)} |\mathcal{S}(E, G)| \\
 &= \sum_{j=0}^k \sum_{G \in \mathcal{P}_j(F)} S_{nj} \\
 &= \sum_{j=0}^k |\mathcal{P}_j(F)| S_{nj} \\
 &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} S_{nj}
 \end{aligned}$$

Comme le cardinal de  $F^E$  est  $k^n$ , on en déduit le résultat suivant.

**Proposition 25.** *Pour tous entiers  $n, k \in \mathbb{N}$ ,*

$$k^n = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} S_{nj}$$

Cette formule peut être « inversée ».

**Proposition 26.** *Pour tous entiers  $n, k \in \mathbb{N}$ ,*

$$S_{nk} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

**Démonstration.** Il s'agit de la *formule d'inversion de Pascal*. Refaisons-en la preuve. Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} S_{ni} \\
 &= \sum_{i=0}^k S_{ni} \sum_{j=i}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \binom{j}{i}
 \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que si  $0 \leq i \leq j \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \binom{k}{j} \binom{j}{i} &= \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{j!}{i!(j-i)!} \\ &= \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{(k-i)!}{(k-j)!(j-i)!} \\ &= \binom{k}{i} \binom{k-i}{j-i} \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} S_{ni} \sum_{j=i}^k (-1)^{k-j} \binom{k-i}{j-i} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} S_{ni} \sum_{j=0}^{k-i} (-1)^j \binom{k-i}{j} \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} S_{ni} (1-1)^{k-i} \\ &= S_{nk} \end{aligned}$$

□

On en déduit une formule de type sommatoire pour les nombres de Stirling de deuxième espèce.

**Corollaire 27.** Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{j^n}{j!(k-j)!}$$

**Démonstration.** Soient  $n, k \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{k!} S_{nk} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{j^n}{j!(k-j)!} \end{aligned}$$

□

## 5 Nombres de Bell

### 5.1 Introduction

**Définition 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Le  $n^{\text{e}}$  nombre de Bell est

$$B_n = |\text{Part}(E)|$$

où  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ .

Clairement,  $B_n$  ne dépend que de  $n$ , et pas de l'ensemble  $E$ .

**Proposition 28.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

**Démonstration.** On a

$$\text{Part}(E) = \bigcup_{k=0}^n \text{Part}_k(E)$$

Cette réunion est disjointe, donc

$$|\text{Part}(E)| = \sum_{k=0}^n |\text{Part}_k(E)|$$

d'où le résultat.  $\square$

### 5.2 Une relation de récurrence

**Proposition 29.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

**Démonstration.** Soit  $n \geq 1$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $a \in E$ . Soit  $F = E \setminus \{a\}$ , de sorte que  $E = F \cup \{a\}$  et  $|F| = n - 1$ . Pour créer une partition  $P$  de  $E$ ,

- On choisit le cardinal  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  de l'ensemble  $A$  de la partition  $P$  qui contient  $a$ .
- On choisit l'ensemble  $A$ , ce qui revient à choisir une partie  $B$  de  $F$  de cardinal  $k - 1$  et à poser  $A = B \cup \{a\}$ . Il y a  $\binom{n-1}{k-1}$  telles parties  $B$ .



- On crée le reste de la partition  $P$ , ce qui revient à choisir une partition de  $E \setminus A$ . Il y a  $B_{n-k}$  telles partitions.

On a donc

$$B_n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}$$

Posons  $k' = n - k$  dans la somme ci-dessus, pour obtenir

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-k} B_k$$

Il reste à remarquer que  $\binom{n-1}{n-1-k} = \binom{n-1}{k}$ .  $\square$

Voici les valeurs de  $B_n$  pour  $0 \leq n \leq 10$ .

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6   | 7   | 8    | 9     | 10     | 11     | 12      |
|-------|---|---|---|---|----|----|-----|-----|------|-------|--------|--------|---------|
| $B_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 15 | 52 | 203 | 877 | 4140 | 21147 | 115975 | 678570 | 4213597 |

FIGURE 5 – Nombres de Bell

### 5.3 La série génératrice des nombres de Bell

**Lemme 30.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = e$$

**Démonstration.** Soit  $k \in \mathbb{N}$ . On a pour tout  $n \geq k$ ,

$$\frac{n^k}{n!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} = \frac{1}{(n-k)!}$$

De là, en remarquant que si  $n < k$  alors  $n^k = 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= e \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 31.** [FORMULE DE DOBINSKI]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} = eB_n$$

**Démonstration.** Les séries considérées étant à termes positifs, toutes les opérations effectuées ci-dessous sont licites. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} k^i \\ &= \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^i}{k!} \\ &= e \sum_{i=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \\ &= eB_n \end{aligned}$$

□

**Lemme 32.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n \leq n!$ .

**Démonstration.** Montrons ce résultat par récurrence forte sur  $n$ . Le résultat est clair pour  $n = 0$ , puisque  $B_0 = 1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que pour tout  $k \leq n$ ,  $B_k \leq k!$ . On a alors

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k! \\ &= n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!} \\ &\leq n! \sum_{k=0}^n 1 \\ &= (n+1)! \end{aligned}$$

□

Considérons, pour  $z \in \mathbb{C}$ , la série entière

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

Notons  $R$  le rayon de convergence de cette série entière.

**Proposition 33.**  $R \geq 1$ .

**Démonstration.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\left| \frac{B_n}{n!} z^n \right| \leq |z|^n$$

La série  $B(z)$  converge donc absolument si  $|z| < 1$ .  $\square$

**Proposition 34.** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1}$$

**Démonstration.** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Supposons  $|z| < R$ . On a

$$\begin{aligned} e^{e^z} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kz}}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n z^n}{n!} \end{aligned}$$

Considérons la famille  $(u_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$  définie pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$  par

$$u_{nk} = \frac{k^n z^n}{k! n!}$$

On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{nk}| = \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|kz|^n}{n!} = \frac{e^{|kz|}}{k!}$$

De là,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |u_{nk}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{|kz|}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{|z|})^k}{k!} = e^{e^{|z|}}$$

La famille  $(u_{nk})_{n,k \in \mathbb{N}}$  est donc sommable. On peut ainsi appliquer le théorème de Fubini et écrire

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \\ &= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \end{aligned}$$

d'où le résultat.  $\square$

## 5.4 Une minoration de $B_n$

La formule de Dobinski montre que pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ ,

$$B_n \geq \frac{1}{e} \frac{k^n}{k!}$$

On peut faire un peu mieux.

**Lemme 35.** *Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ ,*

$$B_n \geq \frac{k^n}{k!}$$

**Démonstration.** Montrons l'inégalité par récurrence sur  $k$ . Celle-ci est claire pour  $k = 0, 1$ . Soit  $k \geq 1$ . Supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $B_n \geq \frac{k^n}{k!}$ . On a alors, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} B_p \\ &\geq \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} \frac{k^p}{k!} \\ &= \frac{(k+1)^{n-1}}{k!} \\ &= \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \end{aligned}$$

Enfin, l'inégalité est vérifiée si  $n = 0$  (c'est même une égalité).  $\square$

**Lemme 36.** *Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$B_n \geq k^{n-k-1} e^{k-1}$$

**Démonstration.** C'est évident pour  $k = 0$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . On a

$$\begin{aligned} \ln k! &= \sum_{j=1}^k \ln j \\ &= \ln k + \sum_{j=1}^{k-1} \int_j^{j+1} \ln j \, dt \\ &\leq \ln k + \sum_{j=1}^{k-1} \int_j^{j+1} \ln t \, dt \\ &= \ln k + \int_1^k \ln t \, dt \\ &= (k+1) \ln k - k + 1 \end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle,

$$k! \leq k^{k+1} e^{-k+1}$$

et donc

$$B_n \geq k^{n-k-1} e^{k-1}$$

□

Soit  $n \geq 2$ . Remarquons que l'inégalité de la proposition précédente s'écrit encore, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\ln B_n \geq (n - k - 1) \ln k + k - 1$$

Cette inégalité est vraie pour tout *entier*  $k \geq 1$ . Nous allons un peu péniblement vérifier qu'elle est encore vérifiée pour  $k = \frac{n}{\ln n}$  qui, lui, n'est pas un entier.

Considérons la fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = (n - x - 1) \ln x + x - 1$$

On a pour tout  $x > 0$ ,

$$\varphi'(x) = -\ln x + \frac{n - x - 1}{x} + 1 = -\ln x + \frac{n - 1}{x}$$

puis

$$\varphi''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{n - 1}{x^2} < 0$$

La fonction  $\varphi'$  est donc strictement décroissante. De plus,  $\varphi'(1) = n - 1 \geq 0$  et

$$\varphi'(n) = -\ln n + 1 - \frac{1}{n} = \ln \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + 1 \leq 0$$

car pour tout  $x > 0$ ,  $\ln x \leq x - 1$ . Ainsi,  $\varphi'$  s'annule en un unique réel  $\alpha > 0$ . De plus,  $1 \leq \alpha \leq n$ . Par la stricte décroissance de  $\varphi'$ ,  $\varphi$  croît strictement sur  $]0, \alpha]$ , puis décroît strictement sur  $[\alpha, +\infty[$ .

Affinons un peu la valeur de  $\alpha$ .

**Lemme 37.** *Pour tout  $n$  assez grand,*

$$\varphi' \left( 1 + \frac{n}{\ln n} \right) > 0$$

**Démonstration.** Un développement asymptotique permet de montrer que lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\varphi' \left( 1 + \frac{n}{\ln n} \right) = \ln \ln n + o(1)$$

Cette quantité est donc strictement positive pour tout  $n$  assez grand. □

**Proposition 38.** *Pour tout entier  $n$  assez grand,*

$$B_n \geq \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{n - \frac{n}{\ln n} - 1} e^{\frac{n}{\ln n} - 1}$$

**Démonstration.** Par le lemme précédent, on a pour tout  $n$  assez grand  $\alpha > 1 + \frac{n}{\ln n}$ . Soit  $k = \lfloor \frac{n}{\ln n} \rfloor + 1$ . On a

$$\frac{n}{\ln n} < k \leq \alpha$$

donc

$$\varphi(k) \geq \varphi\left(\frac{n}{\ln n}\right)$$

et donc

$$B_n \geq \exp \varphi(k) \geq \exp \left[ \varphi\left(\frac{n}{\ln n}\right) \right] = \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{n - \frac{n}{\ln n} - 1} e^{\frac{n}{\ln n} - 1}$$

□

**Remarque.** En fait, cette inégalité est vraie pour tout  $n \geq 2$ . Nous ne le montrerons pas ici.

## 6 Le triangle de Bell

La relation de récurrence que nous avons montrée au sujet des nombres de Bell permet de calculer ceux-ci, mais de façon inefficace. Nous allons dans cette section mettre en place un algorithme plus performant. Pour cela, nous allons nous intéresser aux singletons contenus dans les partitions d'un ensemble.

### 6.1 Partitions et singletons

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , notons  $G_k(E)$  l'ensemble des partitions de  $E$  qui contiennent exactement  $k$  singletons et  $V_{nk}$  le cardinal de  $G_k(E)$ . Clairement,  $V_{nk}$  ne dépend que de  $n$  et de  $k$ , et pas de l'ensemble  $E$ . Notons plus particulièrement  $V_n = V_{n0}$ .

**Proposition 39.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$V_{nk} = \binom{n}{k} V_{n-k}$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Pour créer un élément  $P$  de  $G_k(E)$ ,

- On choisit  $k$  éléments de  $E$ ,  $x_1, \dots, x_k$ . Il y a  $\binom{n}{k}$  possibilités.

- On crée une partition  $P'$  de  $E \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$  qui ne contient pas de singletons. Il y a  $V_{n-k}$  possibilités.
- On rajoute à  $P'$  les singletons  $\{x_1\}, \dots, \{x_k\}$ .

On a donc au total  $\binom{n}{k} V_{n-k}$  éléments dans  $G_k(E)$ .  $\square$

**Proposition 40.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V_k$$

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . On a

$$\text{Part}(E) = \bigcup_{k=0}^n G_k(E)$$

et cette réunion est disjointe. De là,

$$B_n = |\text{Part}(E)| = \sum_{k=0}^n |G_k(E)| = \sum_{k=0}^n V_{nk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} V_{n-k}$$

Le changement d'indice  $k' = n - k$  donne le résultat.  $\square$

**Proposition 41.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$V_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k$$

**Démonstration.** Il s'agit de la formule d'inversion de Pascal. La preuve est la même que celle que nous avons faite pour la proposition 26.  $\square$

## 6.2 La série génératrice de $V_n$

Considérons, pour  $z \in \mathbb{C}$ , les séries entières

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$$

$$V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{n!} z^n$$

Nous avons déjà vu que le rayon de convergence de  $B(z)$  est  $R \geq 1$ .

**Proposition 42.** *Le rayon de convergence de la série entière  $V(z)$  est au moins égal à  $R$ . Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ ,*

$$V(z) = e^{e^z - z - 1}$$

**Démonstration.** On a, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{1}{n!} V_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} B_j = \sum_{j=0}^n \frac{B_j}{j!} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}$$

On reconnaît là le terme général du produit de Cauchy de  $B(z)$  et de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n = e^{-z}$$

dont le rayon de convergence est infini. Ainsi, le rayon de convergence de  $V(z)$  est au moins égal à  $R$  et pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ ,

$$V(z) = B(z)e^{-z} = e^{e^z - z - 1}$$

□

### 6.3 Singleton maximal d'une partition

Pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$ , notons  $E_{nk}$  l'ensemble des partitions  $P \in \text{Part}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$  telles que

- $\{k+1\} \in P$ .
- Pour tout  $j > k+1$ ,  $\{j\} \notin P$ .

**Exemple.**  $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{5, 6\}, \{7, 8, 9\}\} \in E_{83}$ .

Notons  $\langle \frac{n}{k} \rangle = |E_{nk}|$ .

Remarquons que si  $n < k$ , alors  $E_{nk} = \emptyset$  et  $\langle \frac{n}{k} \rangle = 0$ . On a aussi  $E_{00} = \{\{\{1\}\}\}$  et  $\langle \frac{0}{0} \rangle = 1$ .

Deux cas particuliers sont faciles à traiter.

**Proposition 43.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\langle \frac{n}{n} \rangle = B_n$ .*

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Les éléments de  $E_{nn}$  sont les partitions  $P \in \text{Part}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$  telles que  $\{n+1\} \in P$ . Clairement, l'application  $P \mapsto P \setminus \{\{n+1\}\}$  est une bijection de  $E_{nn}$  sur  $\text{Part}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ . Or, cet ensemble est de cardinal  $B_n$ . □



**Proposition 44.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\langle n \rangle_0 = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k$$

**Démonstration.**  $E_{n0}$  est l'ensemble des partitions  $P$  de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  telles que

- $\{1\} \in P$ .
- Pour tout  $j > 1$ ,  $\{j\} \notin P$ .

Dit autrement,  $E_{n0}$  est l'ensemble des partitions de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  qui ne contiennent que  $\{1\}$  comme singleton. Clairement, cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des partitions de  $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$  qui ne contiennent pas de singleton. Et donc avec l'ensemble des partitions de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  qui ne contiennent pas de singleton. Ainsi,  $|E_{n0}| = |G_0(E)| = V_n$ .  $\square$

## 6.4 Une relation de récurrence

Les entiers  $\langle n \rangle_k$  vérifient une relation de récurrence très semblable à celle des coefficients binomiaux.

**Proposition 45.** Pour tous  $n, k \geq 1$ ,

$$\langle n \rangle_k = \langle n-1 \rangle_{k-1} + \langle n \rangle_{k-1}$$

À comparer, évidemment, avec la relation de récurrence

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

**Démonstration.** Soient  $n, k \geq 1$ . Soit  $P \in E_{nk}$ . Deux cas se présentent.

- Cas 1,  $\{k\} \in P$ . Soit  $P'$  obtenue à partir de  $P$  en supprimant le singleton  $\{k+1\}$ , puis en soustrayant 1 à tous les éléments. On a alors  $P' \in E_{(n-1)(k-1)}$ .
- Cas 2,  $\{k\} \notin P$ . Soit  $P'$  obtenue à partir de  $P$  en échangeant  $k$  et  $k+1$ . On a alors  $P' \in E_{n(k-1)}$ .

On vérifie facilement que l'application  $P \mapsto P'$  est une bijection de  $E_{nk}$  sur  $E_{(n-1)(k-1)} \cup E_{n(k-1)}$ . Ainsi, cette réunion étant disjointe,

$$|E_{nk}| = |E_{(n-1)(k-1)}| + |E_{n(k-1)}|$$

d'où le résultat.  $\square$

Nous sommes presque en mesure de calculer les entiers  $\langle \frac{n}{k} \rangle$ , connaissant les entiers  $\langle \frac{n-1}{k} \rangle$ . Le problème est le « cas de base »  $\langle \frac{n}{0} \rangle = V_n$ , dont la valeur n'est pas simple. Heureusement,  $\langle \frac{n}{1} \rangle$  a une valeur intéressante.

**Proposition 46.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\langle \frac{n}{1} \rangle = B_{n-1}$ .*

**Démonstration.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $P \in E_{n1}$ . Deux cas se présentent.

- Cas 1,  $\{1\} \notin P$ . Soit  $A \in P$  l'élément de  $P$  qui contient 1. Décomposons  $A$  en singletons. Il y a parmi ces singletons le singleton  $\{1\}$  et aussi au moins un autre singleton. On obtient une nouvelle partition  $P'$  qui contient les singletons  $\{1\}$ ,  $\{2\}$ , et au moins un autre singleton. Enfin, supprimons les singletons  $\{1\}$  et  $\{2\}$  de  $P'$  pour obtenir une partition  $P''$  de  $\llbracket 3, n+1 \rrbracket$  avec au moins un singleton.
- Cas 2,  $\{1\} \in P$ . En supprimant de  $P$  les singletons  $\{1\}$  et  $\{2\}$  On obtient une partition  $P''$  de  $\llbracket 3, n+1 \rrbracket$  sans singletons.

On vérifie facilement que l'application  $P \mapsto P''$  est une bijection de  $E_{n1}$  sur l'ensemble des partitions de  $\llbracket 3, n+1 \rrbracket$ . Or, il y a  $B_{n-1}$  telles partitions. Ainsi,  $|E_{n1}| = B_{n-1}$ .  $\square$

## 6.5 Le calcul des $\langle \frac{n}{k} \rangle$

Nous connaissons les  $\langle \frac{0}{k} \rangle : \langle \frac{0}{0} \rangle = 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  $\langle \frac{0}{k} \rangle = 0$ . Soit  $n \geq 1$ . Supposons connus les  $\langle \frac{n-1}{k} \rangle$  pour  $k \in \mathbb{N}$ . Par les propositions 43 et 46,

$$\langle \frac{n}{1} \rangle = B_{n-1} = \left\langle \frac{n-1}{n-1} \right\rangle$$

De là, par la proposition 45,

$$\left\langle \frac{n}{0} \right\rangle = \left\langle \frac{n}{1} \right\rangle - \left\langle \frac{n-1}{0} \right\rangle$$

Enfin, toujours par la proposition 45, on a pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$

$$\left\langle \frac{n}{k} \right\rangle = \left\langle \frac{n-1}{k-1} \right\rangle + \left\langle \frac{n}{k-1} \right\rangle$$

Voici les  $\langle \frac{n}{k} \rangle$  pour  $0 \leq n, k \leq 9$ .

- La colonne 0 du tableau contient les entiers  $V_n$ .
- La diagonale du tableau contient les nombres de Bell  $B_n$ .
- La colonne 1 du tableau contient, pour  $n \geq 1$ , les nombres de Bell  $B_{n-1}$ .

| $n$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 0 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 4 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 5 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 6 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 7 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 8 \end{smallmatrix} \rangle$ | $\langle \begin{smallmatrix} n \\ 9 \end{smallmatrix} \rangle$ |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 0   | 1                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 1   | 0                                                              | 1                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 2   | 1                                                              | 1                                                              | 2                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 3   | 1                                                              | 2                                                              | 3                                                              | 5                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 4   | 4                                                              | 5                                                              | 7                                                              | 10                                                             | 15                                                             | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 5   | 11                                                             | 15                                                             | 20                                                             | 27                                                             | 37                                                             | 52                                                             | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 6   | 41                                                             | 52                                                             | 67                                                             | 87                                                             | 114                                                            | 151                                                            | 203                                                            | 0                                                              | 0                                                              | 0                                                              |
| 7   | 162                                                            | 203                                                            | 255                                                            | 322                                                            | 409                                                            | 523                                                            | 674                                                            | 877                                                            | 0                                                              | 0                                                              |
| 8   | 715                                                            | 877                                                            | 1080                                                           | 1335                                                           | 1657                                                           | 2066                                                           | 2589                                                           | 3263                                                           | 4140                                                           | 0                                                              |
| 9   | 3425                                                           | 4140                                                           | 5017                                                           | 6097                                                           | 7432                                                           | 9089                                                           | 11155                                                          | 13744                                                          | 17007                                                          | 21147                                                          |

FIGURE 6 – Les nombres  $\langle \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rangle$

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . Pour déterminer  $B_1, \dots, B_N$ , il suffit de calculer les  $A_{nk}$  pour  $1 \leq n \leq N$  et  $1 \leq k \leq n$ . Tout d'abord,  $A_{11} = 1$ . Pour tout  $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$ ,

- $A_{n1} = A_{(n-1)(n-1)}$ .
- Pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $A_{nk} = A_{(n-1)(k-1)} + A_{n(k-1)}$ . Le calcul de  $A_{nk}$  nécessite donc une unique addition.

Il suffit donc de  $n - 1$  additions pour calculer  $A_{n1}, \dots, A_{nn}$ . Le nombre total d'additions à effectuer est donc

$$C_N = \sum_{n=2}^N (n-1) = \sum_{n=1}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$$

Pour calculer  $B_1, \dots, B_N$ , nous avons donc un algorithme de complexité temporelle (en nombre d'additions)

$$C_N = \Theta(N^2)$$