

Le triangle de Catalan

Marc Lorenzi

24 octobre 2025

On définit pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ les entiers $B(n, k)$. Tout d'abord, $B(0, 0) = 1$ et pour tout $k \geq 1$, $B(0, k) = 0$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(n, 0) = 0$ et pour tout $k \geq 1$,

$$B(n, k) = B(n-1, k-1) + 2B(n-1, k) + B(n-1, k+1)$$

n	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	5	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	14	14	6	1	0	0	0	0	0	0
5	0	42	48	27	8	1	0	0	0	0	0
6	0	132	165	110	44	10	1	0	0	0	0
7	0	429	572	429	208	65	12	1	0	0	0
8	0	1430	2002	1638	910	350	90	14	1	0	0
9	0	4862	7072	6188	3808	1700	544	119	16	1	0
10	0	16796	25194	23256	15504	7752	2907	798	152	18	1

FIGURE 1 – Quelques valeurs de $B(n, k)$

Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- $B(n, n) = 1$.
- Pour tout $k > n$, $B(n, k) = 0$.

Démonstration. Faisons une récurrence sur n . C'est immédiat pour $n = 0$. Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée par n . On a

$$B(n, n) = B(n-1, n-1) + 2B(n-1, n) + B(n-1, n+1) = 1 + 0 + 0 = 1$$

Soit $k > n$. On a

$$B(n, k) = B(n-1, k-1) + 2B(n-1, k) + B(n-1, k+1) = 0 + 0 + 0 = 0$$

□

Proposition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B(n, n-1) = 2(n-1)$.

Démonstration. Montrons le par récurrence sur n . On a $B(1, 0) = 0 = 2(1-1)$. Soit $n \geq 2$. Supposons que $B(n-1, n-2) = 2(n-2)$. On a alors

$$\begin{aligned} B(n, n-1) &= B(n-1, n-2) + 2B(n-1, n-1) + B(n-1, n) \\ &= 2(n-2) + 2 + 0 \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

□

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$B(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}$$

Démonstration. Montrons cette propriété par récurrence sur n . C'est clair pour $n = 1$. Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée par $n-1$. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour $k = 0$, c'est immédiat. Pour $k = n$, nous avons vu que $B(n, n) = 1$. Or,

$$\frac{n}{n} \binom{2n}{n-n} = 1$$

Pour $k = n-1$, nous avons vu que $B(n, n-1) = 2(n-1)$. Or,

$$\frac{n-1}{n} \binom{2n}{n-(n-1)} = \frac{n-1}{n} \binom{2n}{1} = 2(n-1)$$

Supposons maintenant $1 \leq k \leq n-2$. Par l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} B(n, k) &= B(n-1, k-1) + 2B(n-1, k) + B(n-1, k+1) \\ &= \frac{k-1}{n-1} \binom{2n-2}{n-k} + \frac{2k}{n-1} \binom{2n-2}{n-k-1} + \frac{k+1}{n-1} \binom{2n-2}{n-k-2} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \binom{2n-2}{n-k} &= \frac{(2n-2)!}{(n-k)!(n+k-2)!} \\ &= \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \frac{(n+k)(n+k-1)}{(2n-1)2n} \\ &= \binom{2n}{n-k} \frac{(n+k)(n+k-1)}{(2n-1)2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{2n-2}{n-k-1} &= \frac{(2n-2)!}{(n-k-1)!(n+k-1)!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \frac{(n-k)(n+k)}{(2n-1)2n} \\
&= \binom{2n}{n-k} \frac{(n-k)(n+k)}{(2n-1)2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\binom{2n-2}{n-k-2} &= \frac{(2n-2)!}{(n-k-2)!(n+k)!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n-k)!(n+k)!} \frac{(n-k)(n-k-1)}{(2n-1)2n} \\
&= \binom{2n}{n-k} \frac{(n-k)(n-k-1)}{(2n-1)2n}
\end{aligned}$$

On regroupe le tout :

$$B(n, k) = \frac{1}{n-1} \binom{2n}{n-k} \frac{A}{(2n-1)2n}$$

où

$$A = (k-1)(n+k)(n+k-1) + 2k(n-k)(n+k) + (k+1)(n-k)(n-k-1)$$

En développant, on obtient

$$A = 2k(2n-1)(n-1)$$

On a donc

$$B(n, k) = \frac{k}{n} \binom{2n}{n-k}$$

ce qui est la valeur attendue. $\square$

La colonne 1 du triangle de Catalan est très intéressante. Pour tout $n \geq 1$,

$$B(n, 1) = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$$

où C_n est le n^e nombre de Catalan.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$B(n+1, 1) = B(n, 0) + 2B(n, 1) + B(n, 2)$$

ou encore

$$C_{n+1} = 2C_n + B(n, 2)$$

Ainsi,

$$B(n, 2) = 2C_{n+1} - C_n$$

On peut recommencer.

$$B(n+1, 2) = B(n, 1) + 2B(n, 2) + B(n, 3)$$

ou encore

$$2C_{n+2} - C_{n+1} = C_n + 4C_{n+1} - 2C_n + B(n, 3)$$

d'où

$$B(n, 3) = 2C_{n+2} - 5C_{n+1} + 2C_n$$