

# Couplages et triangulations

## Nombres de Catalan

Marc Lorenzi

23 octobre 2025

### 1 Couplages

#### 1.1 Couplages quelconques

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $C = (A_0 \dots A_{2n-1})$  un polygone convexe ayant  $2n$  sommets. Un *couplage* de  $C$  est une partition de l'ensemble des points de  $C$  en  $n$  paires.

Soit  $D_n$  le nombre total de couplages d'un polygone convexe ayant  $2n$  sommets. On a  $D_0 = 1$ . Si  $n \geq 1$ , pour construire un couplage du polygone convexe  $C = (A_0 \dots A_{2n-1})$  :

- On choisit le sommet de  $C$  à associer à  $A_0$  :  $2n - 1$  possibilités.
- On choisit un couplage du polygone convexe formé par les  $2n - 2$  points restants.

On a donc

$$D_n = (2n - 1)D_{n-1}$$

On en déduit facilement que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n = 1.3.5 \dots (2n - 1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4   | 5   | 6     | 7      | 8       | 9        | 10        |
|-------|---|---|---|----|-----|-----|-------|--------|---------|----------|-----------|
| $D_n$ | 1 | 1 | 3 | 15 | 105 | 945 | 10395 | 135135 | 2027025 | 34459425 | 654729075 |

FIGURE 1 – Les premières valeurs de  $D_n$

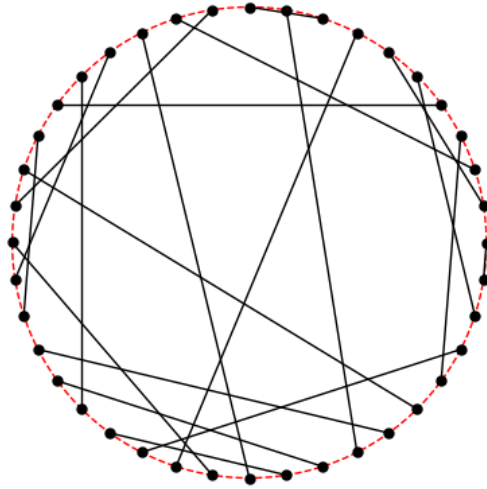


FIGURE 2 – Une couplage d'un polygone à 40 sommets

## 1.2 Couplages parfaits

Un couplage est *parfait* si, lorsque  $\{A, B\}$  et  $\{C, D\}$  sont deux paires du couplage, les segments  $[A, B]$  et  $[C, D]$  ont une intersection vide.

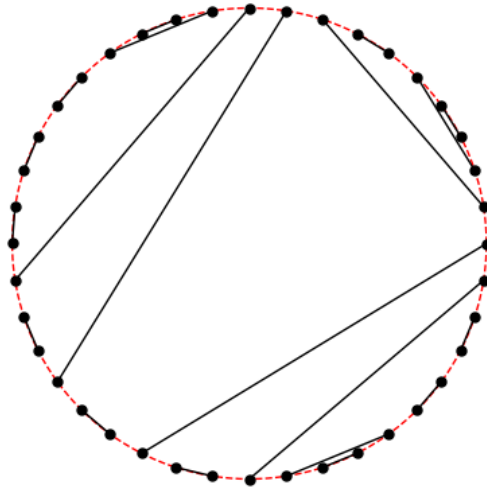


FIGURE 3 – Une couplage parfait d'un polygone à 40 sommets

Notons  $C_n$  le nombre de couplages parfaits d'un polygone convexe ayant  $2n$  sommets. Si  $n = 0$ , le polygone a un unique couplage qui est vide (et parfait). On a donc  $C_0 = 1$ . Un polygone  $(AB)$  possède un unique couplage,  $\{\{A, B\}\}$ . On a donc  $C_1 = 1$ . Un quadrilatère  $(ABCD)$  possède 3 couplages qui sont  $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ ,  $\{\{A, C\}, \{B, D\}\}$  et  $\{\{A, D\}, \{B, C\}\}$ . Le premier et le dernier couplage sont parfaits, le second ne l'est pas. On a donc  $C_2 = 2$ .

Soit  $n \geq 1$ . Pour construire un couplage parfait  $\gamma$  de  $C = (A_0 \dots A_{2n-1})$  :

- On choisit le point  $B$  couplé à  $A_0$ . Ce point est de la forme  $A_{2k+1}$  où  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . En effet, la condition d'intersection vide impose un nombre pair de points de chaque côté du segment  $[A_0, B]$ .
- On choisit un couplage parfait  $\gamma_1$  du polygone convexe  $(A_1 \dots A_{2k})$ . Il y a  $C_k$  tels couplages.
- On choisit un couplage parfait  $\gamma_2$  du polygone convexe  $(A_{2k+2} \dots A_{2n-1})$ . Il y a  $C_{n-1-k}$  tels couplages.

Enfin, on prend

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \{\{A_0, A_{2k+1}\}\}$$

Le nombre de couplages parfaits de  $s$  vérifie donc

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

En conclusion,  $C_n$  est le  $n^e$  nombre de Catalan.

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6   | 7   | 8    | 9    | 10    |
|-------|---|---|---|---|----|----|-----|-----|------|------|-------|
| $C_n$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 42 | 132 | 429 | 1430 | 4862 | 16796 |

FIGURE 4 – Les premières valeurs de  $C_n$

## 2 Triangulations

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Étant donné un polygone convexe  $P$  ayant  $n+2$  sommets, une *triangulation* de  $C$  est un ensemble  $T$  de triangles dont les sommets sont des sommets de  $P$ , vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Deux triangles de  $T$  ont leurs intérieurs disjoints.
- La réunion de tous les triangles de  $T$  (avec leurs intérieurs) est le polygone  $P$  avec son intérieur.

Convenons également qu'un polygone convexe à 2 sommets possède une unique triangulation, qui est vide.

Notons  $C_n$  le nombre de triangulations d'un polygone convexe ayant  $n+2$  sommets. Un triangle possède une unique triangulation. Un quadrilatère  $(ABCD)$  en possède 2 qui sont  $\{(ABC), (ACD)\}$  et  $\{(ABD), (BCD)\}$ . On a donc  $C_0 = 1$  (par convention),  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 2$ .

Soit  $P = (A_0 \dots A_{n+1})$  un polygone convexe ayant  $n+2$  sommets. Pour créer une triangulation  $T$  du polygone  $P$  :

- On choisit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- On choisit une triangulation  $T_1$  du polygone convexe  $(A_0 \dots A_k)$ . Il y a  $C_{k-1}$  telles triangulations.

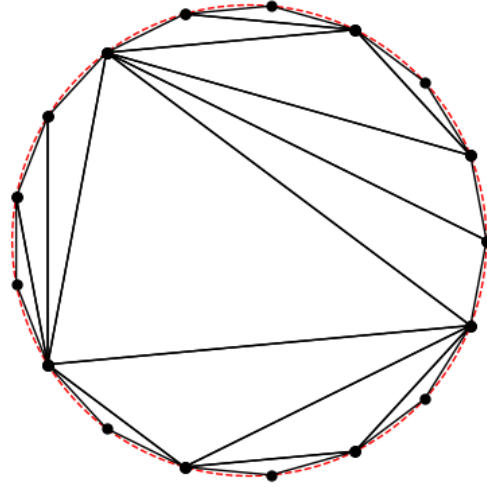


FIGURE 5 – Une triangulation d'un polygone à 10 sommets

- On choisit une triangulation  $T_2$  du polygone convexe  $(A_k A_{k+1}, \dots, A_{n+1})$ . Il y a  $C_{n-k}$  telles triangulations.

Enfin, on prend

$$T = T_1 \cup T_2 \cup \{(A_0 A_k A_{n+1})\}$$

On a donc

$$C_n = \sum_{k=1}^n C_{k-1} C_{n-k}$$

ou encore, par changement d'indice  $k = k' + 1$ ,

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-1-k}$$

En conclusion,  $C_n$  est le  $n^e$  nombre de Catalan.