La suite de Stern

Marc Lorenzi

13 juin 2026

1 Introduction

1.1 La suite de Stern

Définition 1.1.1. La *suite de Stern* est la suite $(a(n))_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

- $a(0) = 0$, $a(1) = 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(2n) = a(n)$ et $a(2n+1) = a(n) + a(n+1)$.

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a(n) \in \mathbb{N}^*$. La définition de la suite suggère que les puissance de 2 joueront un rôle important dans la suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $I_n = [\![2^n, 2^{n+1}]\!]$.

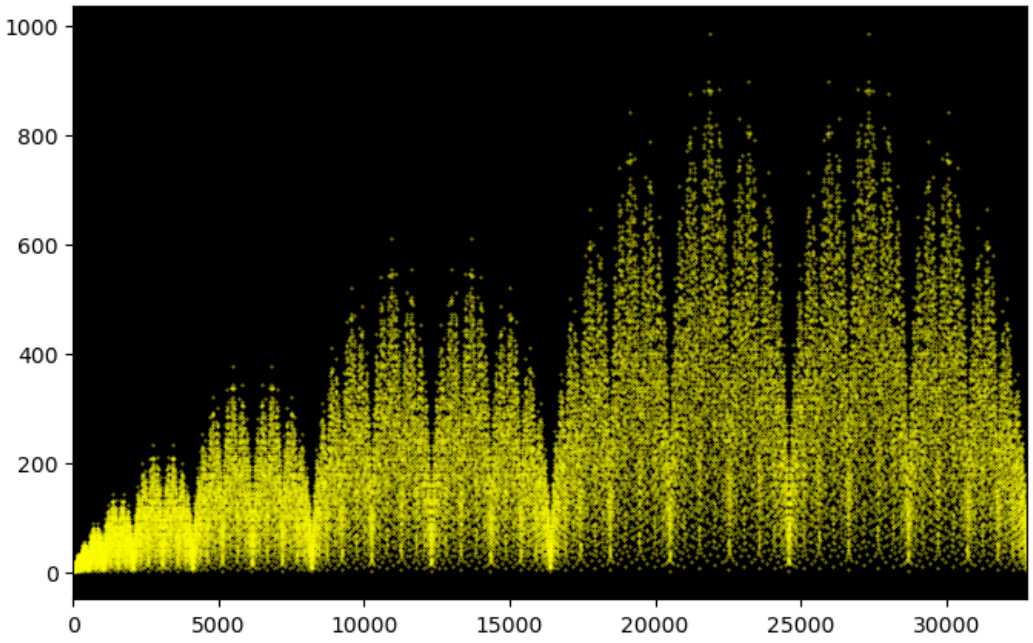

FIGURE 1 – La suite de Stern

Le tableau ci-dessous contient sur la deuxième ligne les premières valeurs de $a(n)$. La ligne d'étiquette 2^n contient les entiers $a(m)$ pour $m \in I_n \setminus \{2^{n+1}\}$. Les points de suspension en fin de ligne indiquent qu'il y a des termes de la suite qui ne sont pas écrits. Les nombres encadrés sont ceux où le maximum est atteint sur la ligne. Nous appellerons ce tableau le *tableau de Stern*.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
$a(n)$	0	1	1	2	1	3	2	3	1	4	3	5	2	5	3	4	
2^0	1																
2^1	1	2															
2^2	1	3	2	3													
2^3	1	4	3	5	2	5	3	4									
2^4	1	5	4	7	3	8	5	7	2	7	5	8	3	7	4	5	
2^5	1	6	5	9	4	11	7	10	3	11	8	13	5	12	7	9	...
2^6	1	7	6	11	5	14	9	13	4	15	11	18	7	17	10	13	...
2^7	1	8	7	13	6	17	11	16	5	19	14	23	9	22	13	17	...
2^8	1	9	8	15	7	20	13	19	6	23	17	28	11	27	16	21	...
2^9	1	10	9	17	8	23	15	22	7	27	20	33	13	32	19	25	...

FIGURE 2 – Le tableau de Stern

Notons quelques valeurs particulières de la suite de Stern.

Proposition 1.1.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a(2^n) = 1$.*

Démonstration. C'est une récurrence immédiate sur n. □

Proposition 1.1.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \leq n$,*

$$a(2^n + 2^p) = n - p + 1$$

Démonstration. Posons $b(n,p) = a(2^n + 2^p)$. Faisons une récurrence sur n. Si $n = 0$, alors $p = 0$ et

$$b(0,0) = a(2) = 1 = 0 - 0 + 1$$

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vérifiée par $n-1$. Soit $p \leq n$. On a $p - 1 \leq n - 1$ et donc, par l'hypothèse de récurrence,

$$b(n,p) = a(2^n + 2^p) = a(2^{n-1} + 2^{p-1}) = b(n-1, p-1) = (n-1) - (p-1) + 1 = n - p + 1$$

□

Une conséquence de ce résultat est que tout entier naturel non nul apparaît une infinité de fois dans la suite de Stern.

1.2 Palindromes

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $m \in I_n$, notons

$$\sigma_n(m) = 2^n + 2^{n+1} - m$$

Comme $m \leq 2^{n+1}$, $\sigma_n(m) \geq 2^n$. Comme $m \geq 2^n$, $\sigma_n(m) \leq 2^{n+1}$. Ainsi, $\sigma_n(m) \in I_n$. Nous venons donc de définir une fonction $\sigma_n : I_n \longrightarrow I_n$. Facilement, $\sigma_n \circ \sigma_n = \mathrm{id}_{I_n}$. L'entier $\sigma_n(m)$ est le « symétrique » de l'entier m dans l'intervalle I_n.

Remarquons que tout $m \in I_n$ peut s'écrire sous la forme $m = 2^n + k$ où $k \in [\![0, 2^n]\!]$. On a alors

$$\sigma_n(m) = 2^{n+1} - k$$

Proposition 1.2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$,*

$$a(2^n + k) = a(2^{n+1} - k)$$

Dit autrement, pout tout $m \in I_n$, $a(\sigma_n(m)) = a(m)$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur n. Pour $n = 0$, il suffit de constater que $a(2) = a(1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée par n. Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$. Deux cas se présentent.

- Cas 1, $k = 2p+1$ est impair. Comme $k \leq 2^{n+1}$, $p \leq 2^n - 1/2 < 2^n$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$a(2^{n+1} + k) = a(2(2^n + p) + 1) = a(2^n + p) + a(2^n + p + 1) = a(2^{n+1} - p) + a(2^{n+1} - p - 1)$$

  et aussi

  $$a(2^{n+2} - k) = a(2(2^{n+1} - p - 1) + 1) = a(2^{n+1} - p - 1) + a(2^{n+1} - p)$$

- Cas 2, $k = 2p$ est pair. Comme $k \leq 2^{n+1}$, $p \leq 2^n$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$a(2^{n+1} + k) = a(2(2^n + p)) = a(2^n + p) = a(2^{n+1} - p)$$

  et aussi

  $$a(2^{n+2} - k) = a(2(2^{n+1} - p)) = a(2^{n+1} - p)$$

□

1.3 Suites arithmétiques

Si nous regardons maintenant les colonnes du tableau de Stern, nous voyons qu'elles forment des suites arithmétiques. Les raisons de ces suites sont d'ailleurs les nombres de la suite de Stern.

Proposition 1.3.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$,*

$$a(2^n + k) = a(k) + a(2^n - k)$$

Démonstration. Ici encore, faisons une récurrence sur n. Pour $n = 0$, il suffit que constater que $a(1) = a(0) + a(1)$ et $a(2) = a(1) + a(0)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée par n. Soit $k \in [\![0, 2^{n+1}]\!]$.

- Cas 1, $k = 2p+1$ est impair. Comme $k \leq 2^{n+1}$, $p \leq 2^n - 1/2 < 2^n$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$\begin{aligned} a(2^{n+1} + k) &= a(2(2^n + p) + 1) \\ &= a(2^n + p) + a(2^n + p + 1) \\ &= a(p) + a(2^n - p) + a(p + 1) + a(2^n - p - 1) \\ &= a(2p + 1) + a(2(2^n - p - 1) + 1) \\ &= a(k) + a(2^{n+1} - k) \end{aligned}$$

- Cas 2, $k = 2p$ est pair. Comme $k \leq 2^{n+1}$, $p \leq 2^n$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$\begin{aligned} a(2^{n+1} + k) &= a(2(2^n + p)) \\ &= a(2^n + p) \\ &= a(p) + a(2^n - p) \\ &= a(2p) + a(2(2^n - p)) \\ &= a(k) + a(2^{n+1} - k) \end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$,*

$$a(2^n + k) = na(k) + a(k + 1)$$

Démonstration. Posons, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$,

$$b(n, k) = a(2^n + k)$$

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq 2^n$. Par les propositions 3 et 4,

$$b(n + 1, k) = a(2^{n+1} + k) = a(k) + a(2^{n+1} - k) = a(k) + a(2^n + k) = a(k) + b(n, k)$$

La suite $(b(n, k))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison $a(k)$. De là,

$$b(n, k) = b(0, k) + na(k) = a(k + 1) + na(k)$$

□

2 Le maximum des lignes

Déterminons maintenant le plus grand élément des lignes du tableau de Stern. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$M_n = \max\{a(m) : m \in I_n\}$$

2.1 Majoration

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la *suite de Fibonacci*, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Proposition 2.1.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n \leq F_{n+2}$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par une récurrence à deux termes. On a $M_0 = 1 = F_2$ et $M_1 = 2 = F_3$. Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée par $n - 1$ et $n - 2$. Soit $k \in [\![0, 2^n]\!]$ tel que $M_n = a(2^n + k)$. Remarquons que k est impair. En effet, pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$a(2q) = a(q) < a(q) + a(q + 1) = a(2q + 1)$$

et aussi

$$a(2q + 1) = a(q) + a(q + 1) > a(q + 1) = a(2q + 2)$$

Posons $k = 2p + 1$, de sorte que $p \in [\![0, 2^{n-1}]\!]$. Il vient

$$M_n = a(2^{n-1} + p) + a(2^{n-1} + p + 1)$$

L'un des deux entiers p et $p + 1$ est pair. Pour fixer les idées, $p = 2q$, où $q \in [\![0, 2^{n-2}]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned} M_n &= a(2^{n-1} + 2q) + a(2^{n-1} + 2q + 1) \\ &= a(2^{n-2} + q) + a(2^{n-1} + 2q + 1) \\ &\leq M_{n-2} + M_{n-1} \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, $M_n \leq F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$. Si p est impair et $p + 1$ est pair, une preuve analogue montre que l'on a encore $M_n \leq F_{n+2}$. □

2.2 La suite de Jacobstahl

Définition 2.2.2. La *suite de Jacobstahl* est la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $J_0 = 0$, $J_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341

FIGURE 3 – Les premières valeurs de J_n

Proposition 2.2.7. *Pour tout $n \geq 1$, J_n est un entier impair.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} \equiv J_{n+1} \bmod 2$. Comme $J_1 = 1$, on en déduit le résultat par récurrence sur n. □

Proposition 2.2.8. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+2} \in I_n$.*

Démonstration. Faisons une récurrence à deux termes sur n. On a $J_2 = 1 \in [\![1, 2]\!]$ et $J_3 = 3 \in [\![2, 4]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $J_{n+2} \in I_n$ et $J_{n+3} \in I_{n+1}$. On a alors

$$J_{n+4} = J_{n+3} + 2J_{n+2} \geq 2^{n+1} + 2 \times 2^n = 2^{n+2}$$

et

$$J_{n+4} = J_{n+3} + 2J_{n+2} \leq 2^{n+2} + 2 \times 2^{n+1} = 2^{n+3}$$

Ainsi, $J_{n+4} \in I_{n+2}$. □

Proposition 2.2.9. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

Démonstration. La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique de cette récurrence est

$$(E)\ x^2 - x - 2 = 0$$

La deux racines de E sont -1 et 2. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \lambda 2^n + \mu(-1)^n$$

De plus, $J_0 = \lambda + \mu = 0$ et $J_1 = 2\lambda - \mu = 1$. On en déduit $\lambda = 1/3$ et $\mu = -1/3$. □

Proposition 2.2.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_{n+1} = 2J_n + (-1)^n$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$J_{n+1} - 2J_n = \frac{1}{3}(2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 2^{n+1} + 2(-1)^n) = (-1)^n$$

□

2.3 La valeur du maximum

Lemme 2.3.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a(J_{n+2}) = a(J_n) + a(J_{n+1})$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a(J_{n+2}) = a(J_{n+1} + 2J_n) = a(4J_n + (-1)^n)$$

Si n est pair, alors

$$a(J_{n+2}) = a(4J_n + 1) = a(2J_n) + a(2J_n + 1) = a(J_n) + a(J_{n+1})$$

Si n est impair, alors

$$a(J_{n+2}) = a(4J_n - 1) = a(2J_n - 1) + a(2J_n) = a(J_{n+1}) + a(J_n)$$

□

Lemme 2.3.12. *Pour tout $n \geq 2$, $a(J_n) = F_n$.*

Démonstration. On a $a(J_2) = a(2) = 1 = F_2$ et $a(J_3) = a(3) = 2 = F_3$. Soit $n \geq 2$. Supposons $a(J_n) = F_n$ et $a(J_{n+1}) = F_{n+1}$. On a alors

$$a(J_{n+2}) = a(J_{n+1}) + a(J_n) = F_{n+1} + F_n = F_{n+2}$$

□

Proposition 2.3.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M_n = F_{n+2}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la proposition 6, $M_n \leq F_{n+2}$. Par la proposition 8, $J_{n+2} \in I_n$ et donc, par le lemme 12, $F_{n+2} = a(J_{n+2}) \leq M_n$. □

2.4 Les indices du maximum

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit

$$J'_n = 2^{n-2} + 2^{n-1} - J_n$$

À partir de l'expression de J_n, on vérifie facilement que

$$J'_n = \frac{5 \times 2^{n-2} + (-1)^n}{3}$$

Si $n \geq 2$, alors $J'_n = \sigma_{n-2}(J_n) \in I_n$. On a $J'_0 = 3/4$ et $J'_1 = 1/2$ (ces deux valeurs ne nous intéresseront pas, nous les donnons juste pour démarrer la suite à l'indice 0). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} J'_{n+1} + 2J'_n &= 2^{n-1} + 2^n - J_{n+1} + 2^{n-1} + 2^n - 2J_n \\ &= 2^n + 2^{n+1} - J_{n+2} \\ &= J'_{n+2} \end{aligned}$$

La suite $(J'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la même relation de récurrence que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
J'_n	3/4	1/2	2	3	7	13	27	53	107	213	427

FIGURE 4 – Les premières valeurs de J_n et J'_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $J_{n+2} \in I_n$ et $a(J_{n+2}) = F_{n+2}$. Par les symétries de la suite de Stern,

$$a(J'_{n+2}) = a(\sigma_n(J_{n+2})) = a(J_{n+2}) = F_{n+2}$$

Le maximum de la ligne n du tableau de Stern est donc atteint en J_{n+2} et aussi en J'_{n+2}. La figure ci-dessous suggère que le maximum est atteint en ces deux points seulement. C'est ce que nous allons maintenant démontrer.

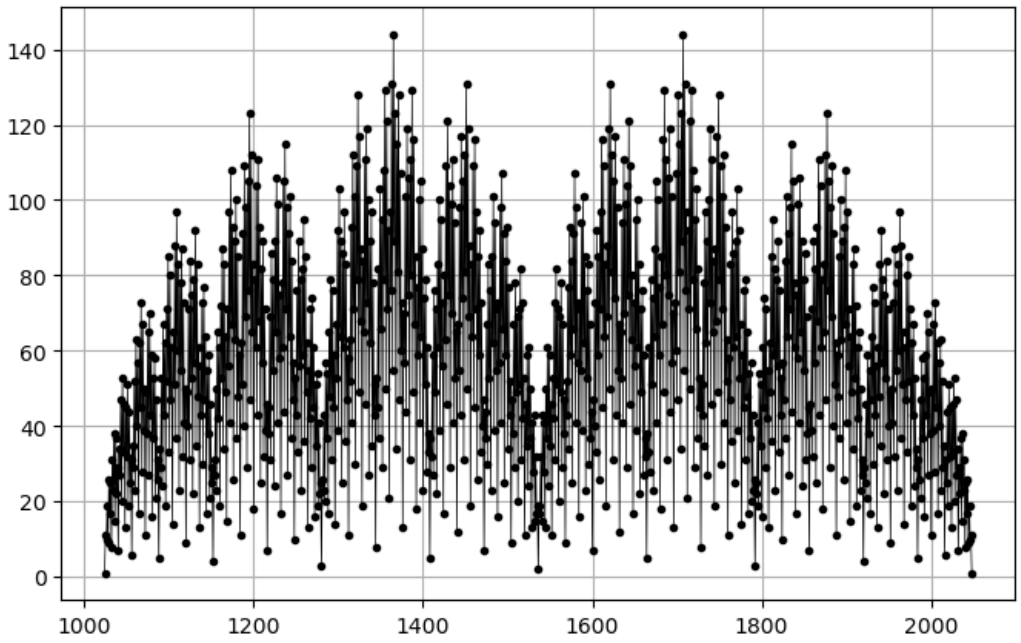

FIGURE 5 – La suite de Stern sur l'intervalle I_{10}. Le maximum est $F_{12} = 144$, atteint en $J_{12} = 1365$ et $J'_{12} = 1707$.

Proposition 2.4.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$J'_n + 2^{n-2} = J_{n+1}$$

$$J_n + 2^{n-1} = J'_{n+1}$$

Démonstration. C'est immédiat à partir de l'expression de J_n et J'_n. □

Proposition 2.4.15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J'_{n+1} = 2J'_n + (-1)^{n+1}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$J'_{n+1} - 2J'_n = \frac{1}{3}(5 \times 2^{n-1} + (-1)^{n+1} - 5 \times 2^{n-1} - 2(-1)^n) = (-1)^{n+1}$$

□

Proposition 2.4.16. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $m \in I_n$, on a $a(m) = F_{n+2}$ si et seulement si $m = J_n$ ou $m = J'_n$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence à deux termes sur n. On a $I_0 = [\![1, 2]\!]$, $J_2 = 1$, $J'_2 = 2$. Et aussi $I_1 = [\![2, 4]\!]$, $J_3 = J'_3 = 3$.

Soit $n \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée par $n-2$ et $n-1$. Soit $m \in I_n$ tel que $a(m) = F_{n+2}$. Nous avons déjà remarqué plus haut que $m = 2p+1$ est impair. On a donc

$$F_{n+2} = a(p) + a(p+1)$$

L'un des deux entiers p et $p+1$ est pair.

- Cas 1, $p = 2q$ est pair. On a

  $$F_{n+2} = a(4q+1) = a(2q) + a(2q+1) = a(q) + a(2q+1)$$

  On a facilement $q \in I_{n-2}$ et $2q+1 \in I_{n-1}$. De là, $a(q) \leq F_{n-2}$ et $a(2q+1) \leq F_{n-1}$. Pour avoir égalité ci-dessus, il faut donc $a(q) = F_{n-2}$ et $a(2q+1) = F_{n-1}$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$(q = J_n \text{ ou } q = J'_n) \text{ et } (2q+1 = J_{n+1} \text{ ou } 2q+1 = J'_{n+1})$$

- Cas 2, $p = 2q+1$ est impair. On a

  $$F_{n+2} = a(4q+3) = a(2q+1) + a(2q+2) = a(2q+1) + a(q+1)$$

  On a facilement $q+1 \in I_{n-2}$ et $2q+1 \in I_{n-1}$. De là, $a(q+1) \leq F_{n-2}$ et $a(2q+1) \leq F_{n-1}$. Pour avoir égalité ci-dessus, il faut donc $a(q+1) = F_{n-2}$ et $a(2q+1) = F_{n-1}$. Par l'hypothèse de récurrence,

  $$(q+1 = J_n \text{ ou } q+1 = J'_n) \text{ et } (2q+1 = J_{n+1} \text{ ou } 2q+1 = J'_{n+1})$$

En détaillant les 4 possibilités dans chacun des deux cas, j'imagine que l'on doit pouvoir montrer que $m = J_{n+2}$ ou $m = J'_{n+2}$. Grosse paresse ... peut-on se passer d'envisager tous les cas ? □

3 Euclide

Cette section s'appelle ainsi parce que nous allons y voir des raisonnements qui calquent l'algorithme d'Euclide pour le calcul du pgcd.

3.1 Une récurrence à deux termes

Pour tous entiers naturels a, b tels que $b \neq 0$, notons $a \bmod b$ le reste de la division euclidienne de a par b.

Proposition 3.1.17. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\begin{aligned} a(2n) \bmod a(2n+1) &= a(n) \\ a(2n+1) \bmod a(2n+2) &= a(n) \bmod a(n+1) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$a(2n) = a(n) < a(n) + a(n+1) = a(2n+1)$$

et donc

$$a(2n) \bmod a(2n+1) = a(2n) = a(n)$$

On a également

$$a(2n+1) = a(n) + a(n+1) = a(n) + a(2n+2)$$

et donc

$$a(2n+1) \bmod a(2n+2) = a(n) \bmod a(2n+2) = a(n) \bmod a(n+1)$$

□

Proposition 3.1.18. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$a(n+2) = a(n) + a(n+1) - 2(a(n) \bmod a(n+1))$$

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété est vérifiée par $2n$ et $2n+1$.

On a

$$a(0) + a(1) - 2(a(0) \bmod a(1)) = 0 + 1 - 2(0 \bmod 1) = 1 = a(2)$$

et

$$a(1) + a(2) - 2(a(1) \bmod a(2)) = 1 + 1 - 2(1 \bmod 1) = 2 = a(3)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vérifiée par $2n$ et $2n+1$. On a

$$\begin{aligned} a(2n+2) + a(2n+3) - 2(a(2n+2) \bmod a(2n+3)) &= a(n+1) + a(n+1) + a(n+2) - 2a(n+1) \\ &= a(n+2) \\ &= a(2n+4) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} a(2n+3) + a(2n+4) - 2(a(2n+3) \bmod a(2n+4)) &= a(n+1) + a(n+2) + a(n+2) \\ &\quad -2(a(n+1) \bmod a(n+2)) \\ &=_{HR} a(n+3) + a(n+2) \\ &= a(2n+5) \end{aligned}$$

□

3.2 Primalité relative

Proposition 3.2.19. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,* $\operatorname{pgcd}(a(n), a(n+1)) = 1$.

Démonstration. Prouvons ce résultat par récurrence sur n. On a $\operatorname{pgcd}(a(0), a(1)) = \operatorname{pgcd}(0, 1) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\operatorname{pgcd}(a(n), a(n+1)) = 1$. Soit d un diviseur de $a(n+1)$ et $a(n+2)$. Posons $a(n) = qa(n+1) + r$ où $r \in [\![0, a(n+1) - 1]\!]$. Par la proposition précédente, d divise $a(n+2) - a(n+1) = a(n) - 2r = 2qa(n+1) - a(n)$. Comme d divise $a(n+1)$, d divise aussi $a(n)$. De là, par l'hypothèse de récurrence, d divise 1. Ainsi, $\operatorname{pgcd}(a(n+1), a(n+2)) = 1$. □

3.3 Une bijection

Notons $\mathcal{Q} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : \text{pgcd}(a,b) = 1\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\gamma(n) = (a(n), a(n+1))$. Par la proposition 19, $\gamma(n) \in \mathcal{Q}$. Nous venons donc de définir une fonction $\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$.

Proposition 3.3.20. *γ est injective.*

Démonstration. Montrons par récurrence forte sur m que pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\gamma(m) = \gamma(n)$ alors $m = n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\gamma(n) = \gamma(0) = (0,1)$. On a alors $a(n) = 0$, d'où $n = 0$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vérifiée par tous les entiers strictement inférieurs à m. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\gamma(m) = \gamma(n)$. On a donc $a(m) = a(n)$ et $a(m+1) = a(n+1)$. Il y a 4 cas à considérer, selon la parité de m et n.

- Cas 1, $m = 2p$ est pair en $n = 2q$ est pair. On a alors $a(p) = a(2p) = a(2q) = a(q)$ et aussi $a(p) + a(p+1) = a(2p+1) = a(2q+1) = a(q) + a(q+1)$. De là, $a(p+1) = a(q+1)$, d'où $\gamma(p) = \gamma(q)$. Par l'hypothèse de récurrence, $p = q$ donc $m = n$.
- Cas 2, $m = 2p+1$ est impair en $n = 2q+1$ est impair. On a alors $a(p) + a(p+1) = a(2p+1) = a(2q+1) = a(q) + a(q+1)$ et aussi $a(p+1) = a(2p+2) = a(2q+2) = a(q+1)$. De là, $a(p) = a(q)$, d'où $\gamma(p) = \gamma(q)$. Par l'hypothèse de récurrence, $p = q$ donc $m = n$.
- Cas 3, $m = 2p$ est pair en $n = 2q+1$ est impair. On a alors

$$a(p) = a(2p) = a(2q+1) = a(q) + a(q+1)$$

$$a(p) + a(p+1) = a(2p+1) = a(2q+2) = a(q+1)$$

  En reportant la valeur de $a(p)$ dans la deuxième égalité, il vient

$$a(q) + a(q+1) + a(p+1) = a(q+1)$$

  d'où $a(q) + a(p+1) = 0$. Impossible puisque $a(q) \in \mathbb{N}$ et $a(p+1) \in \mathbb{N}^*$. Ce cas est donc impossible.
- Cas 4, m est impair en n est pair. Ce cas est analogue au cas 3.

□

Définition 3.3.3. L'*ordre lexicographique* sur $\mathcal{Q}$ est la relation $\preceq$ définie par

$$(a,b) \preceq (c,d) \iff b < d \text{ ou } (b = d \text{ et } a \leq c)$$

Notons également $(a,b) \prec (c,d)$ lorsque $(a,b) \preceq (c,d)$ et $(a,b) \neq (c,d)$.

Proposition 3.3.21. *La relation $\preceq$ est un bon ordre sur $\mathcal{Q}$.*

Démonstration. On vérifie facilement que $\preceq$ est une relation d'ordre. Soit A une partie non vide de $\mathcal{Q}$. Soit

$$B = \{b \in \mathbb{N}^* : \exists a \in \mathbb{N}, (a,b) \in A\}$$

L'ensemble B est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, il possède donc un plus petit élément b_0. Soit

$$C = \{a \in \mathbb{N} : (a, b_0) \in A\}$$

L'ensemble C est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il possède donc un plus petit élément a_0.

On a évidemment $(a_0, b_0) \in A$. Soit $(a, b) \in A$. On a $b \in B$, donc $b \geq b_0$. Si $b > b_0$, alors $(a_0, b_0) \prec (a, b)$. Sinon, $b = b_0$. Dans ce cas, $a \in C$ donc $a \geq a_0$, d'où $(a_0, b_0) \preceq (a, b)$. Ainsi, (a_0, b_0) est le plus petit élément de A. □

Proposition 3.3.22. $\gamma(\mathbb{N}) = \mathcal{Q}$.

Démonstration. Par la proposition 19, $\gamma(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{Q}$. Inversement, montrons par induction sur $\preceq$ que pour tout $x \in \mathcal{Q}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \gamma(n)$.

Tout d'abord, $(0, 1) = \gamma(0)$. Soit $x = (u, v) \in \mathcal{Q}$ différent de $(0, 1)$. On a donc $u, v \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $(c, d) \in \mathcal{Q}$ tel que $(c, d) \prec (u, v)$, $(c, d) \in \gamma(\mathbb{N})$.

- Cas 1, $u > v$. Soit $(c, d) = (u - v, v)$. On a $(c, d) \in \mathcal{Q}$ et $(c, d) \prec (u, v)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $(c, d) = \gamma(n) = (a(n), a(n+1))$. De là, $u = a(n) + a(n+1) = a(2n+1)$ et $v = a(n+1) = a(2n+2)$, d'où $(u, v) = \gamma(2n + 1)$.
- Cas 2, $u < v$. Soit $(c, d) = (u, v - u)$. On a $(c, d) \in \mathcal{Q}$ et $(c, d) \prec (u, v)$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $(c, d) = \gamma(n) = (a(n), a(n + 1))$. De là, $u = a(n) = a(2n)$ et $v = a(n) + a(2n + 1)$, d'où $(u, v) = \gamma(2n)$.

□

Remarque. Le passage de (u, v) à (c, d) est celui qui est utilisé dans l'algorithme d'Euclide : si $u > v$, alors $\text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(u - v, v)$. Si $u < v$, alors $\text{pgcd}(u, v) = \text{pgcd}(u, v - u)$.

Corollaire 3.3.23. *$\gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{Q}$ est une bijection.*

3.4 Une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}_+$

Soit $\psi : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$ définie par $\psi(a, b) = a/b$. La fonction ψ est une bijection. De là,

$$\rho = \psi \circ \gamma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}_+$$

est une bijection.

Proposition 3.4.24. *On $\rho(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\rho(n + 1) = \frac{1}{2\lfloor \rho(n) \rfloor + 1 - \rho(n)}$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\gamma(n + 1) = (a(n + 1), a(n + 2)) = (a(n + 1), a(n) + a(n + 1) - 2a(n) \bmod a(n + 1))$$

On a $\rho(n) = a(n)/a(n + 1)$ et donc

$$a(n) = \lfloor \rho(n) \rfloor a(n + 1) + a(n) \bmod a(n + 1)$$

De là,

$$\begin{aligned}\rho(n+1) &= \frac{a(n+1)}{a(n)+a(n+1)-2(a(n)-\lfloor\rho(n)\rfloor a(n+1))}\\ &= \frac{1}{\rho(n)+1-2(\rho(n)-\lfloor\rho(n)\rfloor)}\\ &= \frac{1}{2\lfloor\rho(n)\rfloor+1-\rho(n)}\end{aligned}$$

□

4 Une interprétation combinatoire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, un développement binaire de n est une suite d'entiers naturels $(b_1, \ldots, b_p)$ strictement croissante vérifiant

$$n = \sum_{k=1}^{p} 2^{b_k}$$

Classiquement, tout entier naturel possède un et un seul développement binaire. Relâchons un petit peu la condition de croissance stricte.

Définition 4.0.4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un *développement hyperbinaire* de n est une suite d'entiers naturels $(b_1, \ldots, b_p)$ (où $p \in \mathbb{N}$) vérifiant

(*i*) $(b_1, \ldots, b_p)$ est croissante.
(*ii*) Pour tout $k \in [\![1, p-2]\!]$, si $b_k = b_{k+1}$, alors $b_{k+1} \neq b_{k+2}$.
(*iii*) $n = \sum_{k=1}^{p} 2^{b_k}$.

Nous noterons $H(n)$ l'ensemble des développements hyperbinaires de n et $h(n)$ le cardinal de $H(n)$. La figure ci-dessous donne la liste des éléments de l'ensemble $H(n)$ ainsi que son cardinal $h(n)$ pour $n \leq 10$. Le premier élément de la liste est le développement binaire usuel de n.

n	$H(n)$	$h(n)$
0	$()$	1
1	(0)	1
2	$(1), (0,0)$	2
3	$(0,1)$	1
4	$(2), (1,1), (0,0,1)$	3
5	$(0,2), (1,1,1)$	2
6	$(1,2), (0,0,2), (0,0,1,1)$	3
7	$(0,1,2)$	1
8	$(3), (2,2), (1,1,2), (0,0,1,2)$	4
9	$(0,3), (0,2,2), (0,1,1,2)$	3
10	$(1,3), (1,2,2), (0,0,3), (0,0,2,2), (0,0,1,1,2)$	5

FIGURE 6 – L'ensemble $H(n)$ et son cardinal.

Les valeurs des cardinaux $h(n)$ nous rappellent évidemment quelque chose. C'est ce que nous allons maintenant montrer.

Lemme 4.0.25. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, les ensembles $H(2m+1)$ et $H(m)$ sont en bijection.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $s = (b_1, \ldots, b_p) \in H(m)$, posons $\varphi(s) = (0, b_1 + 1, \ldots, b_p + 1)$. La suite s vérifie clairement (i) et (ii). De plus,

$$2^0 + \sum_{k=1}^{p} 2^{b_k+1} = 1 + 2\sum_{k=1}^{p} 2^{b_k} = 2m + 1$$

Ainsi, $\varphi(s) \in H(2m+1)$. Nous venons donc de définir une fonction $\varphi : H(m) \longrightarrow H(2m+1)$. On vérifie facilement que φ est bijective. Sa réciproque est la fonction $\psi : H(2m+1) \longrightarrow H(m)$ définie par

$$\psi(b_1, \ldots, b_p) = (b_1 - 1, \ldots, b_p - 1)$$

□

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(b_1, \ldots, b_p) \in H(2m)$. Par la condition (ii), on a au plus deux fois de suite la valeur 0 dans le développement. Par la parité de $2m$, la valeur 0 apparaît zéro fois ou bien 2 fois dans le développement. Posons

$$H'(2m) = \{(b_1, \ldots, b_p) \in H(2m), b_1 \neq 0\}$$
$$H''(2m) = \{(b_1, \ldots, b_p) \in H(2m), b_1 = b_2 = 0\}$$

Lemme 4.0.26. *Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $H'(2m)$ est en bijection avec $H(m)$ et $H''(2m)$ est en bijection avec $H(m-1)$.*

Démonstration. On vérifie facilement que la fonction $\varphi' : H(m) \longrightarrow H'(2m)$ définie par

$$\varphi'(b_1, \ldots, b_p) = (b_1 + 1, \ldots, b_p + 1)$$

est une bijection. De même, la fonction $\varphi'' : H(m-1) \longrightarrow H''(2m)$ définie par

$$\varphi''(b_1, \ldots, b_p) = (0, 0, b_1 + 1, \ldots, b_p + 1)$$

est une bijection. □

Proposition 4.0.27. *Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $h(2m+1) = h(m)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $h(2m) = h(m)+h(m-1)$.*

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}$. La bijection φ entre $H(m)$ et $H(2m)$ montre que

$$h(m) = |H(m)| = |H(2m+1)| = h(2m+1)$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En reprenant les notations vues plus haut, on a

$$H(2m) = H'(2m) \cup H''(2m)$$

Cette réunion est disjointe, donc

$$|H(2m)| = |H'(2m)| + |H''(2m)|$$

Les bijection φ' et φ'' montrent que $|H'(2m)| = |H(m)| = h(m)$ et $|H''(2m)| = |H(m-1)| = h(m-1)$, d'où le résultat. □

Proposition 4.0.28. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(n) = a(n+1)$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence forte sur n. On a $h(0) = 1 = a(1)$. Soit $n \geq 1$ Supposons que pour tout $m < n$, $h(m) = a(m+1)$. Si $n = 2m+1$ est impair, alors

$$h(n) = h(m) = a(m+1) = a(2m+2) = a(n+1)$$

Si $n = 2m$ est pair, alors

$$h(n) = h(m) + h(m-1) = a(m+1) + a(m) = a(2m+1) = a(n+1)$$

□