
Ordinaux

Auteur : Marc LORENZI
Mis à jour le 26 août 2022

Table des matières

I	Théorie élémentaire des ordinaux	5
1	La classe des ordinaux	9
1	Introduction	10
2	Démonstrations par induction sur les ordinaux	18
3	Définitions par récursion sur les ordinaux	19
2	Somme et produit	27
1	L'addition des ordinaux	28
2	Multiplication	34
3	Les points fixes de l'addition	41
3	Continuité	43
1	Une topologie sur ON	44
2	Notion de limite	46
3	Suites transfinies	49
4	Puissances	53
1	Puissances	54
2	Les points fixes de la multiplication	60
3	La forme normale de Cantor	60
4	Application à l'arithmétique des ordinaux	63
5	Les points fixes de l'exponentielle	65
5	Ordinaux limites	69
1	Une énumération de LIM'	70
2	Une description des ordinaux limites	72
6	Dénombrabilité	75
1	Introduction	76
2	Opérations sur les ordinaux f.o.d	77
3	L'ordinal ε_0	78
4	Ordinaux non dénombrables	79
II	Les ordinaux de Von Neumann	85
7	Ensembles bien ordonnés	89
1	Introduction	90

2	Isomorphismes	94
3	Le théorème fondamental	96
8	Transitivité	101
1	Introduction	102
2	Opérations sur les ensembles transitifs	104
9	Ordinaux de Von Neumann	109
1	Notion d'ordinal	110
2	Ordinaux successeurs, ordinaux limites	113
3	La classe des ordinaux	115
4	Nouvelles notations	117
III	Compléments	119
10	Ensembles bien fondés	121
1	Introduction	122
2	Rang d'un ensemble bien fondé	125
3	V et la théorie des ensembles	130
11	Relations bien fondées	135
1	Introduction	136
2	Induction et récursion	139
3	Le lemme de contraction de Mostowski	141
4	Rang	143
Index		153

Première partie

Théorie élémentaire des ordinaux

Tout le monde sait compter : 0, 1, 2, 3, 4, etc. Que signifie ce « et cætera » ? Jusqu'où peut-on compter ? Peut-on compter au-delà des entiers naturels ? Existe-t-il des nombres plus grands que tous les entiers ? Oui, il existe des nombres *au-delà* des entiers, ce sont les *nombres ordinaux*, plus simplement appelés les ordinaux. Mais qu'est-ce qu'un ordinal ? La réponse tient en une phrase :

« Les ordinaux sont les éléments d'une classe propre bien ordonnée dont les segments initiaux sont des ensembles. »

Dans la première partie de ce livre, nous allons tout d'abord expliciter cette phrase obscure. Nous explorerons ensuite les premières propriétés des ordinaux. Nous verrons en particulier que les opérations usuelles, addition, multiplication et exponentiation s'étendent aux ordinaux.

Dans cette première partie, nous allons *admettre* l'existence des ordinaux. Le lecteur motivé pourra ensuite lire la deuxième partie du livre, dans laquelle nous montrerons l'existence et l'unicité de la classe des ordinaux. Dans une troisième partie, nous étudierons quelques applications des ordinaux à la théorie des ensembles.

Chapitre 1

La classe des ordinaux

1 Introduction

1.1 Classes et ensembles

Soit $\varphi(x)$ une formule dépendant de l'ensemble x (et peut-être aussi d'autres paramètres). On définit la *classe*

$$C = \{x : \varphi(x)\}$$

La ligne précédente est une pure notation. On définit alors pour tout ensemble x la signification de « $x \in C$ » :

$$x \in C \iff \varphi(x)$$

Notons en particulier la classe $\mathcal{U} = \{x : x = x\}$. Comme tous les ensembles x vérifient $x = x$, $\mathcal{U}$ est la classe de tous les ensembles. On l'appelle *l'univers*.

Définition 1.1. Une classe qui n'est pas un ensemble est une *classe propre*.

Les classes sont donc de deux types :

- Les ensembles.
- Les classes propres.

Prenons garde au fait que les éléments d'une classe quelconque sont des *ensembles* : une classe propre ne peut pas être un élément d'une autre classe.

Comment savoir si une classe est un ensemble ? Les axiomes de la théorie des ensembles sont justement là pour nous le dire. Nous ne détaillerons pas ces axiomes à ce stade du livre, mais notons que nous avons en particulier les axiomes suivants, énoncés ici de façon informelle.

- Le *schéma d'axiomes de sélection*. Toute sous-classe d'un ensemble est un ensemble.
- L'*axiome des parties*. Si E est un ensemble, la classe des sous-ensembles de E est un ensemble.
- L'*axiome de la réunion*. Si E est un ensemble, la réunion $\bigcup_{x \in E} x$ de tous les ensembles qui appartiennent à E est encore un ensemble. On le note de façon plus concise $\bigcup E$. C'est ce que l'on appelle l'*union* de l'ensemble E .
- Le *schéma d'axiomes de remplacement*. L'image d'un ensemble par une fonction est encore un ensemble.

Remarquons qu'il est inutile d'invoquer un « axiome de l'intersection ».

Proposition 1.1. Soit E un ensemble non vide. Alors la classe $\bigcap E = \bigcap_{x \in E} x$ est un ensemble.

Démonstration. Soit $X_0 \in E$. La classe $\bigcap E$ est une sous-classe de X_0 , c'est donc un ensemble par le schéma d'axiomes de sélection. $\square$

Que se passe-t-il si $E = \emptyset$? Dans ce cas, pour tout ensemble x , on a évidemment

$$\forall y \in \emptyset, x \in y$$

Ainsi,

$$\bigcap \emptyset = \mathcal{U}$$

où $\mathcal{U}$ est la classe de tous les ensembles.

Nous allons maintenant voir que $\mathcal{U}$ est une classe propre. Comment montrer qu'une classe est propre ? Très souvent, on suppose que c'est un ensemble et on arrive à une contradiction. Le résultat suivant est dû à Bertrand Russell.

Proposition 1.2. [« PARADOXE » DE RUSSELL]

La classe $\mathcal{U}$ de tous les ensembles est une classe propre.

Remarquons les guillemets autour du mot « paradoxe ». Ce qui était un paradoxe en 1901 ne l'est plus de nos jours. Au début du XX^e siècle, le concept d'ensemble n'était pas complètement formalisé. Le paradoxe de Russell, entre autres, a montré la nécessité de préciser exactement ce que l'on entend par un « ensemble ».

Démonstration. Supposons que $\mathcal{U}$ est un ensemble. Par le schéma d'axiomes de sélection, la sous-classe de $\mathcal{U}$

$$E = \{x \in \mathcal{U} : x \notin x\}$$

est aussi un ensemble. Par définition de E , on a pour tout ensemble x

$$x \in E \iff x \notin x$$

Comme E est un ensemble, l'équivalence ci-dessus est vérifiée pour $x = E$. On a donc, en remplaçant x par E ,

$$E \in E \iff E \notin E$$

Contradiction. $\square$

Nous allons dans ce chapitre et les suivants étudier une classe propre, la classe des *ordinaux*. Il est possible de définir précisément ce qu'est un ordinal, mais ce n'est pas la voie que nous choisissons ici pour commencer. Pour faire un parallèle, un cours élémentaire d'Analyse commence par affirmer l'existence de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et de ses propriétés caractéristiques. Par exemple, $\mathbb{R}$ est un corps ordonné dont toute partie non vide et majorée possède une borne supérieure. La preuve de l'*existence* de $\mathbb{R}$ (par une *construction* explicite de celui-ci) est souvent admise dans un premier temps, car elle est relativement compliquée. Si le but recherché est de travailler sur l'ensemble $\mathbb{R}$, cela ne pose pas de problème d'admettre l'existence de $\mathbb{R}$. Bien entendu tout mathématicien honnête voudra plus tard examiner la preuve de cette existence.

Pour les ordinaux c'est la même chose. Construire explicitement les ordinaux demande d'entrer dans des subtilités sur les ensembles (comme par exemple de travailler sur le concept d'ensemble *transitif*). Comme notre objectif est de manipuler le plus vite possible les ordinaux, nous allons donner trois « axiomes » terriblement simples qui caractérisent complètement la classe ON des ordinaux. Redisons-le, ces axiomes n'en sont pas vraiment. Ils peuvent être *montrés* à partir des axiomes de la théorie des ensembles. Nous le ferons dans la seconde partie du livre.

1.2 Qu'est-ce qu'un ordinal ?

Définition 1.2. Les *ordinaux* sont les éléments d'une classe que nous noterons ON .

Notation. Nous représenterons les ordinaux par les lettres grecques α, β, γ , etc.

Le lecteur concentré se dira sans doute que cette définition ne nous avance pas beaucoup. En fait, elle ne nous avance pas du tout, si ce n'est qu'elle nous dit que la classe des ordinaux est notée ON . Nous allons maintenant donner trois axiomes qui nous diront ce que l'on peut faire avec des ordinaux. Tout d'abord, la classe ON est munie d'une *relation de bon ordre*.

(ON_1) La classe ON est munie d'une relation $\leq$, vérifiant les propriétés suivantes.

- $\leq$ est une relation d'ordre sur ON .
- Toute sous-classe non vide de ON possède un plus petit élément.

Le premier point nous dit que pour tous ordinaux α, β et γ ,

- $\alpha \leq \alpha$.
- $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \implies \alpha = \beta$.
- $\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \gamma \implies \alpha \leq \gamma$.

Le second point, appelé la propriété de *bon ordre*, signifie que si C est une classe non vide d'ordinaux, alors

$$\exists \alpha \in C, \forall \beta \in C, \alpha \leq \beta$$

Proposition 1.3. $\leq$ est un ordre total sur ON .

Démonstration. Soient α et β deux ordinaux. L'ensemble $\{\alpha, \beta\}$ est une partie non vide de ON . Il possède donc un plus petit élément. Si c'est α , alors $\alpha \leq \beta$. Si c'est β , alors $\beta \leq \alpha$. $\square$

Remarque. Nous définissons de la façon usuelle les relations $<$, $\geq$ et $>$ sur ON . Si α et β sont deux ordinaux,

- $\alpha < \beta$ lorsque $\alpha \leq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.
- $\alpha \geq \beta$ lorsque $\beta \leq \alpha$.
- $\alpha > \beta$ lorsque $\beta < \alpha$.

Notation. Pour tous $\alpha, \beta \in \text{ON}$, nous noterons

$$[\![\alpha, \beta]\!] = \{\gamma \in \text{ON} : \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$$

Nous utiliserons également la notation $]\![\alpha, \beta[\![$ pour exclure β , ainsi que d'autres notations similaires. Nous appellerons ces classes des *intervalles d'ordinaux*.

Jusque là, rien de bien exceptionnel. Par exemple, $\mathbb{N}$ ou l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, ou même $\emptyset$, munis de l'ordre usuel, vérifient (ON_1) . Si nous voulons fabriquer des objets aussi exceptionnels que les ordinaux, nous devons rajouter un axiome qui écarte ces ensembles. Soyons exigeants.

(ON_2) ON est une classe propre.

Comme $\emptyset$ est un ensemble et pas ON , nous savons maintenant qu'il existe des ordinaux. Si nous appliquons l'axiome (ON_1) à la classe ON tout entière, nous obtenons l'existence d'un ordinal plus petit que tous les ordinaux. Nous noterons cet ordinal 0 :

$$0 = \min(ON)$$

Maintenant que nous savons que ON est une classe propre, il nous reste à rajouter un axiome qui nous dira que cette classe est « propre mais pas trop ».

(ON_3) Pour tout $\alpha \in ON$, $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$ est un ensemble.

On prouve facilement que tous les intervalles d'ordinaux sont des ensembles.

Proposition 1.4. *Pour tous ordinaux α et β , $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$, $\llbracket \alpha, \beta \llbracket$, etc. sont des ensembles.*

Démonstration. On a $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket \subseteq \llbracket 0, \beta \rrbracket$. Par (ON_3) , $\llbracket 0, \beta \rrbracket$ est un ensemble. Comme toute sous-classe d'un ensemble est un ensemble, $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$ est aussi un ensemble. Même démonstration pour les autres types d'intervalles. $\square$

Pour résumer nos trois « axiomes » et rajouter un peu d'unicité, voici le théorème que nous ne montrerons pas.

Proposition 1.5. [THÉORÈME FONDAMENTAL]

Il existe une classe propre bien ordonnée $(ON, \leq)$ telle que pour tout $\alpha \in ON$, $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$ soit un ensemble. Une telle classe est unique à bijection croissante unique près.

Le résultat d'unicité nous dit que si $(ON', \leq)$ est une classe vérifiant ces propriétés, alors il existe une unique bijection croissante de ON sur ON' .

Nous savons maintenant tout, ou presque. Il ne reste plus qu'à en explorer quelques conséquences, ce qui nous occupera pendant les cent prochaines pages.

1.3 Ensemble ou classe ?

Il existe une façon très simple de caractériser les classes d'ordinaux qui sont des ensembles et celles qui sont des classes propres.

Proposition 1.6. *Soit C une classe d'ordinaux. La classe C est un ensemble si et seulement si elle est majorée.*

Nous allons montrer ce résultat en deux temps.

Proposition 1.7. *Tout ensemble d'ordinaux possède une borne supérieure (et est donc majoré).*

Démonstration. Soit E un ensemble d'ordinaux. Soit

$$F = \bigcup_{\alpha \in E} \llbracket 0, \alpha \llbracket$$

Par l'axiome de la réunion, F est un ensemble.

Supposons que E ne soit pas majoré. Soit $\beta \in \text{ON}$. L'ordinal β ne majore pas E , donc il existe $\alpha \in E$ tel que $\beta < \alpha$. Mais alors, $\beta \in \llbracket 0, \alpha \llbracket$, et donc $\beta \in F$. Ainsi,

$$F = \text{ON}$$

Contradiction, puisque F est un ensemble et pas ON.

Ainsi, E est majoré. L'ensemble des majorants de E est une sous-classe non vide de ON, qui admet donc un plus petit élément. Ce plus petit élément est, par définition d'une borne supérieure, la borne supérieure de E . $\square$

Nous n'avons pas exclu le cas où $E = \emptyset$ parce que nous n'avons pas à le faire. En effet, tous les ordinaux majorent $\emptyset$, et donc

$$\sup \emptyset = \min(\text{ON}) = 0$$

Exemple prématuré. Soit α un ordinal. Quelle est la borne supérieure de l'intervalle $\llbracket 0, \alpha \llbracket$? Tout le monde s'attend à ce que ce soit α . Eh bien, tout le monde a tort : ce n'est pas forcément α . Nous reparlerons de cela plus loin.

Proposition 1.8. *Soit C une classe d'ordinaux. Si C est majorée, alors C est un ensemble.*

Démonstration. Supposons que C est majorée par un ordinal α . On a alors

$$C \subseteq \llbracket 0, \alpha \llbracket$$

Par le schéma d'axiomes de sélection, toute sous-classe d'un ensemble est un ensemble. Par (ON_3) , $\llbracket 0, \alpha \llbracket$ est un ensemble. Donc C est un ensemble. $\square$

1.4 Successeur d'un ordinal, ordinaux limites

Proposition 1.9. *Soit $\alpha \in \text{ON}$. Il existe $\beta \in \text{ON}$ tel que $\alpha < \beta$.*

Démonstration. Comme ON est une classe propre, α ne majore pas ON, d'où le résultat. $\square$

Pour tout ordinal α , la classe des majorants stricts de α est ainsi non vide. Cette classe possède donc un plus petit élément, ce qui justifie la définition ci-dessous.

Définition 1.3. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Le plus petit ordinal β tel que $\alpha < \beta$ est appelé le *successeur* de α .

Notation. Nous noterons $S(\alpha)$ ou α^+ le successeur de l'ordinal α .

On définit ainsi une fonction $S : \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$, la *fonction successeur*.

La proposition suivante nous montre comment, dans la classe des ordinaux, on passe d'une inégalité stricte à une inégalité large et vice versa.

Proposition 1.10. Pour tous ordinaux α et β ,

- $\alpha < \alpha^+$.
- $\alpha < \beta \iff \alpha^+ \leq \beta$.
- $\alpha \leq \beta \iff \alpha < \beta^+$.

Démonstration. Le premier point et le sens direct du second point résultent de la définition de α^+ . De là, si $\alpha^+ \leq \beta$, alors $\alpha < \alpha^+ \leq \beta$, d'où la réciproque.

La contraposée du second point est

$$\beta \leq \alpha \iff \beta < \alpha^+$$

En échangeant les lettres α et β , on obtient le troisième point. $\square$

Proposition 1.11. Soient α et β deux ordinaux. On a

- $\alpha < \beta \iff \alpha^+ < \beta^+$.
- $\alpha \leq \beta \iff \alpha^+ \leq \beta^+$.
- $\alpha = \beta \iff \alpha^+ = \beta^+$.

Démonstration. Supposons $\alpha < \beta$. Alors $\alpha^+ \leq \beta$ puis $\alpha^+ < \beta^+$.

Inversement, supposons $\alpha^+ < \beta^+$. Alors $\alpha^+ \leq \beta$, puis $\alpha < \beta$.

Les deux autres équivalences sont des conséquences de la première. $\square$

La fonction S est ainsi une fonction strictement croissante de ON vers ON.

Définition 1.4. Un ordinal *successeur* est un ordinal de la forme β^+ , où $\beta \in \text{ON}$. Un ordinal *limite* est un ordinal non nul qui n'est pas un ordinal successeur.

L'ordinal 0 n'est évidemment pas successeur, puisque c'est le plus petit ordinal. Il existe donc trois types d'ordinaux :

- 0

- les ordinaux successeurs
- les ordinaux limites

Notons le résultat suivant, qui nous donne la valeur de la borne supérieure des intervalles ouverts d'ordinaux.

Rappelons-nous la question que nous avons posée un peu plus haut : quelle est la borne supérieure de l'intervalle $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$? Plus généralement, quelle est la borne supérieure de l'intervalle $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$?

Proposition 1.12. *Soient $\alpha, \beta \in ON$. On suppose $\alpha < \beta$.*

- Si $\beta = \gamma^+$ est un ordinal successeur, $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket = \llbracket \alpha, \gamma \rrbracket$.
- Si β est un ordinal limite, $\sup \llbracket \alpha, \beta \rrbracket = \beta$.

Démonstration.

- Supposons que $\beta = \gamma^+$ est un ordinal successeur. Pour tout ordinal δ , on a

$$\begin{aligned} \delta \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket &\iff \alpha \leq \delta < \gamma^+ \\ &\iff \alpha \leq \delta \leq \gamma \end{aligned}$$

Ainsi, $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket = \llbracket \alpha, \gamma \rrbracket$. La borne supérieure de l'intervalle $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$ est donc γ .

- Supposons que β est un ordinal limite. Tout d'abord, β majore $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$. Soit $\gamma < \beta$. On a $\gamma^+ \leq \beta$. Comme β n'est pas un ordinal successeur, on a aussi $\gamma^+ \neq \beta$, et donc $\gamma^+ < \beta$.

Si $\gamma < \alpha$ alors, comme $\alpha \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$, γ ne majore pas $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$.

Si $\alpha \leq \gamma < \beta$, alors $\alpha \leq \gamma < \gamma^+ < \beta$ et donc $\gamma^+ \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$. De là, γ ne majore pas $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$.

Ainsi, β est le plus petit majorant de $\llbracket \alpha, \beta \rrbracket$.

□

Nous utiliserons très souvent le fait suivant, utilisé dans la démonstration ci-dessus. Si β est un ordinal *limite*, alors pour tout ordinal γ ,

$$\gamma < \beta \implies \gamma^+ < \beta$$

Ce qui est remarquable, c'est la conservation de l'inégalité stricte dans le passage au successeur.

1.5 Entiers naturels

Posons $\bar{0} = 0$, le plus petit ordinal. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\overline{n+1} = \bar{n}^+$$

Posons enfin

$$\mathcal{N} = \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Nous venons de définir une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathcal{N}$, la fonction $n \mapsto \bar{n}$. Le schéma d'axiomes de remplacement nous dit que $\mathcal{N}$ est un ensemble.

Définition 1.5. Les éléments de $\mathcal{N}$ sont appelés les *ordinaux finis*. Un ordinal qui n'est pas fini est un ordinal *infini* ou *transfini*.

Proposition 1.13. *L'application $f : n \mapsto \bar{n}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$f(n+1) = \overline{n+1} = \bar{n}^+ > \bar{n} = f(n)$$

Ainsi, f est strictement croissante. Elle est donc injective. Enfin, par définition de $\mathcal{N}$, f est surjective. $\square$

Les ensembles ordonnés $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\mathcal{N}, \leq)$ sont donc des ensembles ordonnés isomorphes. Dorénavant, nous identifierons les éléments de $\mathcal{N}$ aux entiers naturels. Nous écrirons donc n au lieu de $\bar{n}$. Nous identifierons aussi $\mathcal{N}$ et $\mathbb{N}$. Nous verrons au fil des chapitres que cette identification ne pose aucun problème. Retenons en particulier qu'avec notre identification,

$$\mathbb{N} \subseteq \text{ON}$$

En fait, on a même $\mathbb{N} \subset \text{ON}$, puisque $\mathbb{N}$ est un ensemble et que ON est une classe propre.

Proposition 1.14. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, n est un ordinal successeur si et seulement si $n \neq 0$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. On a

$$(n-1)^+ = (n-1) + 1 = n$$

Ainsi, n est un ordinal successeur. De plus, 0 n'est pas successeur. $\square$

Nous allons maintenant montrer que les ordinaux transfinis portent bien leur nom. Ils ne sont pas cachés quelque part entre deux entiers naturels, mais ils sont *au-delà* de tous les entiers naturels.

Proposition 1.15. *Soit α un ordinal. Alors, α est transfini si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < \alpha$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < \alpha$. Alors $\alpha \notin \mathbb{N}$, donc α est transfini.

La contraposée de la réciproque est

$$(\exists n \in \mathbb{N}, \alpha \leq n) \implies \alpha \in \mathbb{N}$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\alpha \leq n \implies \alpha \in \mathbb{N})$$

Montrons cette propriété par récurrence sur n .

Supposons $\alpha \leq 0$. Alors, comme $0 = \min(\text{ON})$, $\alpha = 0$ donc $\alpha \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que si $\alpha \leq n$ alors $\alpha \in \mathbb{N}$. Supposons maintenant que $\alpha \leq n + 1$. Si $\alpha = n + 1$, alors $\alpha \in \mathbb{N}$. Sinon, $\alpha < n + 1 = n^+$, donc $\alpha^+ \leq n^+$, d'où $\alpha \leq n$. Par l'hypothèse de récurrence, $\alpha \in \mathbb{N}$. $\square$

La classe des ordinaux transfinis est une sous-classe non vide de ON , elle possède donc un plus petit élément. Quel est le plus petit ordinal transfini ?

Définition 1.6. On pose $\omega = \sup \mathbb{N}$.

Rappelons que tout ensemble non vide d'ordinaux a une borne supérieure, ce qui justifie l'existence de ω .

Proposition 1.16. ω est un ordinal transfini.

Démonstration. Supposons un instant que $\omega \in \mathbb{N}$. On a alors $\omega^+ \in \mathbb{N}$. Or, $\omega < \omega^+$, ce qui contredit le fait que ω majore $\mathbb{N}$. Ainsi, ω est transfini. $\square$

En fait, ω est le plus petit ordinal transfini.

Proposition 1.17. Pour tout ordinal α , α est transfini si et seulement si $\omega \leq \alpha$.

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons $\omega \leq \alpha$. Alors, comme ω majore $\mathbb{N}$ et n'appartient pas à $\mathbb{N}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ donc α est transfini.

Inversement, supposons α transfini. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n < \alpha$, et donc α majore $\mathbb{N}$. Par la minimalité de ω , $\omega \leq \alpha$. $\square$

Proposition 1.18. ω est un ordinal limite.

Démonstration. Soit $\alpha < \omega$. L'ordinal α est donc fini. De là, α^+ est aussi fini, et donc $\alpha^+ \neq \omega$. Ainsi, ω est un ordinal limite. $\square$

Bien entendu, ω n'est pas le seul ordinal transfini. Il y a aussi ω^+ , ω^{++} , etc. Que cache ce « etc » ? Nous allons maintenant nous donner deux outils puissants qui nous permettront d'aller bien au-delà du fini : la démonstration par induction et la définition par récursion.

2 Démonstrations par induction sur les ordinaux

La proposition ci-dessous est l'équivalent pour les ordinaux du principe de récurrence forte sur les entiers naturels.

Proposition 1.19. *Soit $\varphi(\alpha)$ une formule dépendant de l'ordinal α (et éventuellement d'autres paramètres). On suppose que pour tout $\alpha \in ON$,*

$$(\forall \beta < \alpha, \varphi(\beta)) \implies \varphi(\alpha)$$

Alors, pour tout $\alpha \in ON$, on a $\varphi(\alpha)$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha \in ON$ tel que $\varphi(\alpha)$ ne soit pas vérifiée. Prenons un tel α minimal. On a donc pour tout $\beta < \alpha$, $\varphi(\beta)$. Par l'hypothèse, on a donc $\varphi(\alpha)$, contradiction. $\square$

Voici une version de cette propriété plus adaptée à beaucoup de démonstrations. Elle est un peu l'équivalent pour les ordinaux du principe de récurrence simple sur les entiers naturels.

Proposition 1.20. *Soit $\varphi(\alpha)$ une propriété dépendant de l'ordinal α (et éventuellement d'autres paramètres). On suppose*

- $\varphi(0)$.
- Pour tout $\alpha \in ON$, $\varphi(\alpha) \implies \varphi(\alpha^+)$.
- Pour tout ordinal limite α ,

$$(\forall \beta < \alpha, \varphi(\beta)) \implies \varphi(\alpha)$$

Alors, pour tout $\alpha \in ON$, on a $\varphi(\alpha)$.

Démonstration. Identique ou presque à celle de la proposition précédente. Il suffit de distinguer trois cas. $\square$

Pour l'instant, nous aurions du mal à donner des exemples de démonstrations par induction non triviales. Pourquoi? Parce que nous n'avons pas encore les moyens de fabriquer des objets qui « dépendent d'un ordinal ». C'est justement le but de l'outil suivant, bien plus subtil il faut le dire.

3 Définitions par récursion sur les ordinaux

3.1 Introduction

Dans la section précédente, nous avons parlé de démonstrations par induction sur les ordinaux. Ici, nous allons voir comment *définir* des fonctions par induction. Ce problème est totalement différent de celui de la preuve par induction. Aussi, pour suivre l'exemple des anglo-saxons, je ne parlerai pas de définition par induction mais de définition par *récursion*.

Avant tout, disons quelques mots sur la notion de *fonction*. Nous aurons besoin dans le théorème de récursion de voir les fonctions comme des ensembles.

Définition 1.7. Soient C et D deux classes. Une *fonction* de C vers D est une classe f dont les éléments sont des couples (x, y) où $x \in C$ et $y \in D$. On demande de plus que

$$\forall x \in C, \exists! y \in D, (x, y) \in f$$

On note alors de façon classique $f : C \longrightarrow D$, $y = f(x)$, etc.

Notons également le concept de *restriction*.

Définition 1.8. Soient A et B deux classes. Soit $f : A \longrightarrow B$ une fonction. Soit $C \subseteq A$. La *restriction* de f à C est la fonction $f|_C : C \longrightarrow B$ définie pour tout $x \in C$ par $f|_C(x) = f(x)$.

3.2 Le théorème de récursion

Proposition 1.21. Soit $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ une fonction. Il existe une unique fonction $f : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que pour tout ordinal α ,

$$f(\alpha) = G(f|_{[0, \alpha[})$$

Démonstration. Nous allons pour l'instant montrer uniquement l'unicité. Nous réservons l'existence à plus tard.

Supposons qu'il existe deux fonctions $f : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ et $g : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ telles que pour tout ordinal α ,

$$f(\alpha) = G(f|_{[0, \alpha[})$$

$$g(\alpha) = G(g|_{[0, \alpha[})$$

Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $f(\alpha) = g(\alpha)$.

Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $f(\beta) = g(\beta)$. Cela signifie que

$$f|_{[0, \alpha[} = g|_{[0, \alpha[}$$

De là,

$$f(\alpha) = G(f|_{[0, \alpha[}) = G(g|_{[0, \alpha[}) = g(\alpha)$$

□

La preuve de l'existence est plus subtile. Nous verrons cela plus tard. Donnons également, comme nous l'avons fait pour le théorème de démonstration par induction, une version de ce résultat plus adaptée à beaucoup de démonstrations.

Proposition 1.22. Soit $a \in \mathcal{U}$. Soient $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ et $H : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ deux fonctions. Il existe une unique fonction $f : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que

- $f(0) = a$.

- Pour tout ordinal α , $f(\alpha^+) = G(f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket})$.
- Pour tout ordinal limite α , $f(\alpha) = H(f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket})$.

Démonstration. Considérons la fonction $K : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ définie pour tout ensemble $E \in \mathcal{U}$ comme suit.

- $K(\emptyset) = a$.
- Si α est un ordinal et $E : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \rightarrow \mathcal{U}$ est une fonction, alors $K(E) = G(E)$.
- Si α est un ordinal limite et $E : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \rightarrow \mathcal{U}$ est une fonction, alors $K(E) = H(E)$.
- Sinon, $K(E) = \emptyset$.

On vérifie alors facilement que $f : \text{ON} \rightarrow \mathcal{U}$ vérifie les conditions voulues si et seulement si pour tout ordinal α ,

$$f(\alpha) = K(f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket})$$

On en déduit l'existence et l'unicité de f par le premier théorème de définition par récursion. $\square$

3.3 Un exemple

Nous allons définir par récursion sur β la somme $\alpha + \beta$ de deux ordinaux α et β . La voici. Nous verrons ensuite comment, précisément, nous appliquons le théorème de récursion pour définir cela.

Soit $\alpha \in \text{ON}$. On définit par récursion sur β l'ordinal $\alpha + \beta$ comme suit.

- $\alpha + 0 = \alpha$.
- Pour tout ordinal β , $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$.
- Pour tout ordinal limite β , $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.

Pour les ordinaux finis, cette définition coïncide avec celle de l'addition usuelle dans $\mathbb{N}$ (le troisième point de la définition n'est dans ce cas pas utilisé). Notre identification entre les ordinaux finis et les entiers naturels n'est donc pas remise en cause.

Nous avons en fait, pour chaque ordinal α , défini la fonction $f_\alpha : \beta \mapsto \alpha + \beta$. On a

- $f_\alpha(0) = \alpha$.
- Pour tout ordinal β , $f_\alpha(\beta^+) = (f_\alpha(\beta))^+$.
- Pour tout ordinal limite β , $f_\alpha(\beta) = \sup\{f_\alpha(\gamma) : \gamma < \beta\}$.

Nous avons appliqué le second théorème de récursion. Qu'avons nous choisi pour a , G et H ?

Pour a , c'est facile : $a = \alpha$.

Quand à G , on peut prendre la fonction définie comme suit. Pour tout ensemble E ,

- S'il existe $\alpha \in \text{ON}$ tel que $E : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \rightarrow \mathcal{U}$, alors $G(E) = E(\alpha)^+$.

- Sinon, $G(E) = \emptyset$.

Pour la fonction H , on peut par exemple la définir comme suit.

- S'il existe un ordinal limite α tel que $E : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \mathcal{U}$, alors

$$H(E) = \sup\{E(\beta) : \beta < \alpha\}$$

- Sinon, $H(E) = \emptyset$.

Remarquons que les valeurs de G et H dans les cas « sinon » importent peu. Tout ce qu'il faut, c'est que G et H soient définies sur $\mathcal{U}$.

Maintenant que nous pouvons enfin fabriquer des fonctions définies sur les ordinaux, nous pouvons nous lancer dans une démonstration par induction. Nous allons faire très simple.

Proposition 1.23. *Pour tout ordinal α , $0 + \alpha = \alpha$.*

Mais enfin, me direz-vous, $\alpha + 0 = \alpha$ fait partie de la définition de l'addition ? Certes, mais il s'avère que l'addition des ordinaux n'est pas commutative. Par exemple :

- $\omega + 1 = \omega + 0^+ = (\omega + 0)^+ = \omega^+ \neq \omega$.
- En revanche, comme ω est un ordinal limite,

$$1 + \omega = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \sup(\mathbb{N}^*) = \omega$$

Bref, notre proposition demande à être prouvée.

Démonstration. Montrons par induction sur α que pour tout $\alpha \in \text{ON}$, $0 + \alpha = \alpha$.

- $0 + 0 = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $0 + \alpha = \alpha$. Alors,

$$0 + \alpha^+ = (0 + \alpha)^+ = \alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $0 + \beta = \beta$. Alors,

$$0 + \alpha = \sup\{0 + \beta : \beta < \alpha\} = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \sup\llbracket 0, \alpha \rrbracket = \alpha$$

□

Nous verrons bien d'autres propriétés de l'addition dans le prochain chapitre.

Le lecteur pressé pourra maintenant aborder le chapitre suivant, dans lequel nous parlerons de l'arithmétique des ordinaux. Le lecteur courageux pourra lire la preuve ci-dessous du théorème de récursion.

3.4 La preuve du théorème de récursion

Nous allons montrer la propriété d'existence du théorème général de récursion. Rappelons le théorème.

Soit $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$ une fonction. Il existe une unique fonction $f : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que pour tout ordinal α ,

$$f(\alpha) = G(f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket})$$

Pour tout ordinal α , posons

$$E_\alpha = \{f : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \mathcal{U} : \forall \beta < \alpha \ f(\beta) = G(f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket})\}$$

Les fonctions appartenant à E_α sont donc des fonctions qui vérifient « partiellement » la relation de récurrence.

Lemme 1.24. *Soient α et β deux ordinaux tels que $\beta < \alpha$. Soit $f \in E_\alpha$. Alors, $f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket} \in E_\beta$.*

Démonstration. C'est immédiat. $\square$

Lemme 1.25. *Soient α et β deux ordinaux tels que $\beta < \alpha$. Soient $f \in E_\alpha$ et $g \in E_\beta$. On a $f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket} = g$.*

Démonstration. Montrons la propriété par induction sur β .

- Si $\beta = 0$, la propriété est trivialement vérifiée.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons la propriété vérifiée pour β . Soit $\alpha \in \text{ON}$ tel que $\beta^+ < \alpha$. Soit $f \in E_\alpha$. Soit $g \in E_{\beta^+}$. Posons $h = g|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}$. Par le lemme 24, on a $h \in E_\beta$ donc, par l'hypothèse d'induction, on a $f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket} = h$. Ainsi, pour tout ordinal $\gamma < \beta$,

$$f(\gamma) = h(\gamma) = g|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}(\gamma) = g(\gamma)$$

De plus,

$$f(\beta) = G(f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}) = G(h) = G(g|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}) = g(\beta)$$

Ainsi, $f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket} = g$.

- Soit $\beta \in \text{ON}$ un ordinal limite. Supposons la propriété vérifiée pour tout ordinal $\delta < \beta$. Soit $\alpha \in \text{ON}$ tel que $\beta < \alpha$. Soit $f \in E_\alpha$. Soit $g \in E_\beta$. Soit $\gamma < \beta$. Comme β est un ordinal limite, il existe un ordinal δ tel que $\gamma < \delta < \beta$. Par le lemme 24, on a $g|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket} \in E_\delta$. Par l'hypothèse d'induction, $f|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket} = g|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket}$ et donc

$$f(\gamma) = f|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket}(\gamma) = g|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket}(\gamma) = g(\gamma)$$

Ainsi, $f|_{\llbracket 0, \delta \rrbracket} = g$.

$\square$

Lemme 1.26. *Pour tout ordinal α , E_α est un singleton.*

Démonstration. Le fait que E_α contienne au plus un élément se prouve comme l'unicité du théorème de définition par induction.

Montrons l'existence d'un élément dans E_α par induction sur α .

- Clairement, E_0 est un singleton. Son unique élément est l'application triviale $f : \emptyset \longrightarrow \mathcal{U}$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $E_\alpha = \{f_\alpha\}$ est un singleton. Soit f la fonction définie, pour tout $\beta < \alpha$, par $f(\beta) = f_\alpha(\beta)$, et $f(\alpha) = G(f_\alpha)$. Clairement, $f \in E_{\alpha+}$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $E_\beta = \{f_\beta\}$ est un singleton. Posons

$$f = \bigcup_{\beta < \alpha} f_\beta$$

A priori, f est une relation.

★ Tout d'abord, montrons que f est une relation définie sur $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$. Si $(x, y) \in f$, il existe $\beta < \alpha$ tels que $(x, y) \in f_\beta$. Ainsi, puisque $f_\beta : \llbracket 0, \beta \rrbracket \longrightarrow \mathcal{U}$, $x \in \llbracket 0, \beta \rrbracket$ et donc x est un ordinal strictement inférieur à β , donc à α . Inversement, soit $\beta < \alpha$. Comme α est un ordinal limite, il existe un ordinal γ tel que $\beta < \gamma < \alpha$. On a $f_\gamma \subseteq f$ et donc $(\beta, f_\gamma(\beta)) \in f$. Ainsi, l'ensemble des ordinaux x tels qu'il existe un ensemble y pour lequel $(x, y) \in f$ est précisément $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$.

★ Montrons maintenant que f est une fonction. Soient $\beta < \alpha$ et $y, y' \in \mathcal{U}$. Supposons $(\beta, y) \in f$ et $(\beta, y') \in f$. Il existe $\gamma, \delta < \alpha$ tels que $(\beta, y) \in f_\gamma$ et $(\beta, y') \in f_\delta$. Par exemple, $\gamma < \delta$. On a alors par le lemme précédent, $f_\delta|_{\llbracket 0, \gamma \rrbracket} = f_\gamma$. De là,

$$y = f_\gamma(\beta) = f_\delta(\beta) = y'$$

f est donc bien une fonction.

★ Montrons enfin que $f \in E_\alpha$. Soit $\beta < \alpha$. Soit γ un ordinal tel que $\beta < \gamma < \alpha$. On a pour tout ordinal $\delta < \gamma$, $f(\delta) = f_\gamma(\delta)$. Ainsi, $f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket} = f_\gamma|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}$. De là,

$$f(\beta) = f_\gamma(\beta) = G(f_\gamma|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket}) = G(f|_{\llbracket 0, \beta \rrbracket})$$

□

Démonstration du théorème. Par le lemme 26, pour tout $\alpha \in \text{ON}$, E_α est un singleton. Appelons f_α l'unique élément de E_α .

Soit $f : \text{ON} \longrightarrow \mathcal{U}$ définie, pour tout $\alpha \in \text{ON}$, par

$$f(\alpha) = f_{\alpha+}(\alpha)$$

Remarquons que pour tout ordinal α , pour tout ordinal $\beta < \alpha$,

$$f(\beta) = f_{\beta+}(\beta) = f_{\alpha+}(\beta)$$

Ainsi, $f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket} = f_{\alpha+}|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket}$. De là,

$$f(\alpha) = f_{\alpha+}(\alpha) = G(f_{\alpha+}|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket}) = G(f|_{\llbracket 0, \alpha \rrbracket})$$

La fonction f répond donc à la question. $\square$

Chapitre 2

Somme et produit

Nous allons dans ce chapitre aborder l'arithmétique des ordinaux. Commençons par l'addition, que nous avons déjà introduite dans le chapitre précédent.

1 L'addition des ordinaux

1.1 La définition

Définition 2.1. Soit $\alpha \in \text{ON}$. On définit par induction sur β la somme $\alpha + \beta$ des deux ordinaux α et β .

- $\alpha + 0 = \alpha$.
- Pour tout ordinal β , $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$.
- Pour tout ordinal limite β , $\alpha + \beta = \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.

Remarquons que pour les ordinaux finis, cette définition coïncide avec celle de l'addition des entiers naturels. Notre identification des ordinaux finis avec les entiers naturels ne présente donc aucune ambiguïté à ce niveau.

Commençons par déterminer les sommes qui font intervenir 0 ou 1.

Proposition 2.1. *Pour tout ordinal α ,*

- $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$.
- $\alpha + 1 = \alpha^+$.
- Si $\alpha \geq \omega$, alors $1 + \alpha = \alpha$.

Bien entendu, si $\alpha < \omega$, alors $\alpha \in \mathbb{N}$ et $1 + \alpha = \alpha + 1$. C'est une récurrence facile sur α .

Une conséquence de cette proposition est en particulier le fait suivant :

L'addition des ordinaux n'est pas commutative.

Par exemple, $1 + \omega = \omega \neq \omega^+ = \omega + 1$. Attention, donc. Il est très rare en mathématiques qu'une opération notée additivement ne soit pas commutative.

Démonstration.

- L'égalité $\alpha + 0 = \alpha$ fait partie de la définition de l'addition.

Montrons par induction sur α que pour tout $\alpha \in \text{ON}$, $0 + \alpha = \alpha$.

- $0 + 0 = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $0 + \alpha = \alpha$. Alors,

$$0 + \alpha^+ = (0 + \alpha)^+ = \alpha^+$$

- Soit $\alpha \in \text{ON}$ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $0 + \beta = \beta$. Alors,

$$0 + \alpha = \sup\{0 + \beta : \beta < \alpha\} = \sup\{\beta : \beta < \alpha\} = \sup\llbracket 0, \alpha \llbracket = \alpha$$

- Soit $\alpha \in \text{ON}$. On a

$$\alpha + 1 = \alpha + 0^+ = (\alpha + 0)^+ = \alpha^+$$

- Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\omega \leq \alpha \implies 1 + \alpha = \alpha$.
- C'est clair pour $\alpha = 0$, vu que $\omega \leq 0$ est faux.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons la propriété vérifiée pour α . Supposons $\omega \leq \alpha^+$. Comme ω n'est pas un ordinal successeur, on a en fait $\omega < \alpha^+$, et donc $\omega \leq \alpha$. De là,

$$1 + \alpha^+ = (1 + \alpha)^+ = \alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $\omega \leq \beta \implies 1 + \beta = \beta$. Commençons par regarder ce qui se passe quand $\alpha = \omega$. Dans ce cas,

$$1 + \alpha = \sup\{1 + n : n < \omega\} = \sup \mathbb{N}^* = \omega$$

Prenons maintenant $\alpha > \omega$. On a

$$\begin{aligned} 1 + \alpha &= \sup\{1 + \beta : \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{1 + \beta : \omega \leq \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{\beta : \omega \leq \beta < \alpha\} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

La seconde égalité mérite peut-être quelques explications. On a

$$\begin{aligned} \{1 + \beta : \beta < \alpha\} &= \{1 + \beta : \beta < \omega\} \cup \{1 + \beta : \omega \leq \beta < \alpha\} \\ &= \mathbb{N}^* \cup \{1 + \beta : \omega \leq \beta < \alpha\} \end{aligned}$$

Le second ensemble du membre de droite est non vide parce que $\alpha > \omega$. De plus, il contient $1 + \omega = \omega$, qui est strictement plus grand que les éléments de $\mathbb{N}^*$.

□

Corollaire 2.2. *Pour tout ordinal $\alpha \geq \omega$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n + \alpha = \alpha$.*

Démonstration. Soit $\alpha \geq \omega$. Montrons la propriété par récurrence sur n .

- $0 + \alpha = \alpha$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n + \alpha = \alpha$. Il va nous falloir ici anticiper un peu. Admettons provisoirement que l'addition des ordinaux est associative, nous montrerons cette propriété plus loin. On a alors

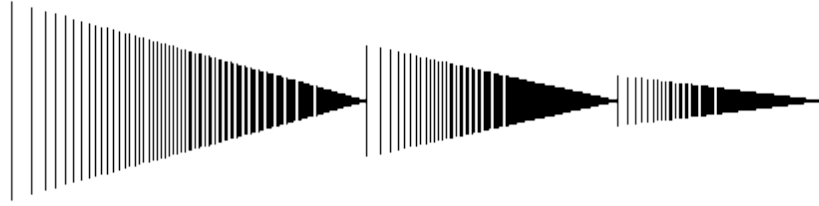
$$(n + 1) + \alpha = n + (1 + \alpha) = n + \alpha = \alpha$$

□

Maintenant que nous avons défini l'addition, nous pouvons commencer à dessiner les « premiers » ordinaux, triés dans l'ordre croissant. Nous avons tout d'abord les entiers naturels, suivis de ω . L'ordinal qui suit immédiatement ω est son

successeur $\omega + 1$. On voit ensuite apparaître $\omega + 2$, $\omega + 3$, etc. jusqu'à $\omega + \omega$. Le successeur de $\omega + \omega$ est $(\omega + \omega) + 1$, etc.

Bien entendu, ce n'est qu'un début. Nous reparlerons de cette liste lorsque nous aurons abordé la multiplication. Voici une tentative de représentation des ordinaux de 0 à $(\omega + \omega) + \omega$. Chaque trait vertical représente un ordinal. Le premier « triangle » représente les ordinaux entre 0 et ω . Viennent ensuite les ordinaux de $\omega + 1$ à $\omega + \omega$, et enfin, pour le dernier triangle, les ordinaux de $(\omega + \omega) + 1$ à $(\omega + \omega) + \omega$. Chaque triangle est constitué de ω traits verticaux.



1.2 Compatibilité avec l'ordre

Nous allons maintenant regarder comment les additions conservent les inégalités. Mais n'oublions pas que l'addition des ordinaux n'est pas commutative. Nous allons voir que les additions à droite se comportent moins bien que les additions à gauche.

Proposition 2.3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in ON$.

Si $\beta \leq \gamma$, alors $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.

La réciproque est fausse.

Démonstration. Concernant la réciproque, on a par exemple

$$2 + \omega \leq 1 + \omega$$

C'est même une égalité. Pourtant, $2 \not\leq 1$.

Supposons $\beta \leq \gamma$. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.

- $\beta + 0 = \beta \leq \gamma = \gamma + 0$.
- Soit $\alpha \in ON$. Supposons $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$. On a alors

$$\beta + \alpha^+ = (\beta + \alpha)^+ \leq (\gamma + \alpha)^+ = \gamma + \alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \alpha$, $\beta + \delta \leq \gamma + \delta$. On a

$$\gamma + \alpha = \sup\{\gamma + \delta : \delta < \alpha\}$$

Ainsi, pour tout $\delta < \alpha$,

$$\beta + \delta \leq \gamma + \delta \leq \gamma + \alpha$$

L'ordinal $\gamma + \alpha$ majore donc l'ensemble $\{\beta + \delta : \delta < \alpha\}$. Par minimalité de $\beta + \alpha$, qui est la borne supérieure de cet ensemble, on en déduit

$$\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$$

□

Regardons maintenant les additions à gauche. Ici, tout va pour le mieux. On a même conservation des inégalités strictes.

Proposition 2.4. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$. On a*

$$\beta < \gamma \iff \alpha + \beta < \alpha + \gamma$$

Démonstration. Montrons par induction sur γ que pour tout ordinal γ ,

$$\beta < \gamma \implies \alpha + \beta < \alpha + \gamma$$

- C'est clair si $\gamma = 0$ puisque $\beta < 0$ est impossible.
- Soit γ un ordinal. Supposons que $\beta < \gamma \implies \alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Supposons $\beta < \gamma^+$, c'est à dire $\beta \leq \gamma$. On a deux cas à considérer.

Si $\beta < \gamma$, alors, par l'hypothèse d'induction,

$$\alpha + \beta < \alpha + \gamma < (\alpha + \gamma)^+ = \alpha + \gamma^+$$

Si $\beta = \gamma$, alors

$$\alpha + \beta = \alpha + \gamma < (\alpha + \gamma)^+ = \alpha + \gamma^+$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \gamma$,

$$\beta < \delta \implies \alpha + \beta < \alpha + \delta$$

Supposons $\beta < \gamma$. Comme γ est un ordinal limite, on a aussi $\beta^+ < \gamma$. En appliquant l'hypothèse d'induction à β^+ , il vient $\alpha + \beta^+ < \alpha + \gamma$. Or, $\alpha + \beta < \alpha + \beta^+$, donc $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Passons à la réciproque. On utilise en fait le sens direct. Si $\beta = \gamma$, alors $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \not< \alpha + \gamma$. De même, si $\beta > \gamma$, par la proposition précédente on a $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$, donc $\alpha + \beta \not< \alpha + \gamma$. Ainsi, si $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$, alors $\beta < \gamma$. □

1.3 Soustraction

Proposition 2.5. *Soient α et β deux ordinaux. On a $\alpha \leq \beta$ si et seulement si il existe un ordinal γ tel que $\beta = \alpha + \gamma$. Un tel ordinal γ est alors unique.*

On le note $\gamma = \beta - \alpha$.

Retenons donc que $\beta - \alpha$ est défini lorsque $\alpha \leq \beta$, et que l'on a l'égalité caractéristique

$$\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$$

Avant d'aborder la démonstration, posons-nous une question. Peut-on déplacer les parenthèses dans l'égalité ci-dessus ? En d'autres termes, que vaut $(\alpha + \beta) - \alpha$? C'est l'unique ordinal γ tel que $\alpha + \gamma = \alpha + \beta$. Clairement, β convient. Donc

$$(\alpha + \beta) - \alpha = \beta$$

Tout a l'air d'aller pour le mieux. Encore une question : que vaut $(\alpha + \beta) - \beta$? C'est l'unique ordinal γ tel que $\beta + \gamma = \alpha + \beta$. Et là, nous sommes très embêtés. Il est fort possible que l'on ait $\gamma \neq \alpha$. Par exemple, si nous prenons $\alpha = 1$ et $\beta = \omega$, alors $\omega + 0 = 1 + \omega$ et donc

$$(1 + \omega) - \omega = 0$$

alors que

$$1 + (\omega - \omega) = 1$$

Attention, donc, à la soustraction des ordinaux.

Démonstration. Pour tout ordinal γ ,

$$\alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + \gamma$$

Ainsi,

$$\beta = \alpha + \gamma \implies \alpha \leq \beta$$

Inversement, supposons $\alpha \leq \beta$. Remarquons que

$$\alpha + \beta \geq 0 + \beta = \beta$$

Ainsi, la classe

$$C = \{\gamma \in \text{ON} : \alpha + \gamma \geq \beta\}$$

est non vide, puisqu'elle contient β . La classe C possède donc un plus petit élément que nous noterons γ .

Tout d'abord, $\gamma \in C$, donc $\alpha + \gamma \geq \beta$. Pour montrer l'autre inégalité, considérons trois cas.

- Si $\gamma = 0$, alors on a $\alpha \geq \beta$. Mais on a aussi $\alpha \leq \beta$, donc $\beta = \alpha = \alpha + 0$.
- Si $\gamma = \delta^+$ est un ordinal successeur, alors, comme $\delta < \gamma$, $\delta \notin C$. Ainsi, $\alpha + \delta < \beta$, et donc

$$\alpha + \gamma = \alpha + \delta^+ = (\alpha + \delta)^+ \leq \beta$$

- Supposons enfin que γ est un ordinal limite. Pour tout $\delta < \gamma$, $\delta \notin C$ et donc $\alpha + \delta < \beta$. Ainsi, β majore l'ensemble $\{\alpha + \delta : \delta < \gamma\}$. Or, la borne supérieure de cet ensemble est justement $\alpha + \gamma$, donc $\alpha + \gamma \leq \beta$.

Il reste à montrer l'unicité de γ . Soient $\gamma, \gamma' \in \text{ON}$. Si $\gamma < \gamma'$, alors $\alpha + \gamma < \alpha + \gamma'$, donc $\alpha + \gamma \neq \alpha + \gamma'$. De même si $\gamma' < \gamma$. Ainsi, si $\alpha + \gamma = \alpha + \gamma'$, alors $\gamma = \gamma'$. $\square$

1.4 Addition et bornes supérieures

Proposition 2.6. *Soit E un ensemble non vide d'ordinaux. Soit $\alpha \in \text{Ord}$. On a alors*

$$\sup\{\alpha + \beta : \beta \in E\} = \alpha + \sup(E)$$

Démonstration. Notons $F = \{\alpha + \beta : \beta \in E\}$ et $\gamma = \sup E$. On a pour tout $\beta \in E$, $\beta \leq \gamma$ et donc

$$\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$$

Ainsi, $\alpha + \gamma$ majore F .

Soit maintenant δ un majorant de F . Clairement, comme E est non vide, $\alpha \leq \delta$. Il existe donc $\varepsilon \in \text{ON}$ tel que $\delta = \alpha + \varepsilon$. Pour tout $\beta \in E$, on a donc

$$\alpha + \beta \leq \alpha + \varepsilon$$

et donc $\beta \leq \varepsilon$. Il en résulte que ε majore E , et donc, par minimalité de γ , $\gamma \leq \varepsilon$. De là,

$$\alpha + \gamma \leq \alpha + \varepsilon = \delta$$

Ainsi, $\alpha + \gamma$ est le plus petit majorant de F . $\square$

1.5 Associativité

Proposition 2.7. *L'addition des ordinaux est associative. Pour tous ordinaux α, β, γ ,*

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur γ .

- $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.
- Soit γ un ordinal. Supposons que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Alors,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma^+ &= ((\alpha + \beta) + \gamma)^+ \\ &= (\alpha + (\beta + \gamma))^+ \\ &= \alpha + (\beta + \gamma)^+ \\ &= \alpha + (\beta + \gamma^+) \end{aligned}$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$,

$$(\alpha + \beta) + \delta = \alpha + (\beta + \delta)$$

On a alors

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \sup\{(\alpha + \beta) + \delta : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha + (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha + \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma) \end{aligned}$$

où, à l'avant dernière ligne, on a utilisé la proposition 6. $\square$

1.6 Résumé

Voici le résumé des principales propriétés de l'addition des ordinaux. Dans le cadre ci-dessous, α , β et γ désignent des ordinaux quelconques.

$$\begin{aligned}\alpha + 0 &= 0 + \alpha = \alpha \\ \alpha + 1 &= \alpha^+ \\ \alpha \geq \omega &\implies 1 + \alpha = \alpha \\ (\alpha + \beta) + \gamma &= \alpha + (\beta + \gamma) \\ \beta \leq \gamma &\implies \beta + \alpha \leq \gamma + \alpha \\ \beta < \gamma &\iff \alpha + \beta < \alpha + \gamma\end{aligned}$$

2 Multiplication

2.1 La définition

Définition 2.2. Soit $\alpha \in \text{ON}$. On définit par récursion sur β le produit $\alpha \times \beta$ des deux ordinaux α et β .

- $\alpha \times 0 = 0$.
- Pour tout ordinal β , $\alpha \times \beta^+ = \alpha \times \beta + \alpha$.
- Pour tout ordinal limite β , $\alpha \times \beta = \sup\{\alpha \times \gamma : \gamma < \beta\}$.

Remarquons que pour les ordinaux finis, cette définition donne la multiplication usuelle des entiers naturels.

Commençons par une mise en garde.

Proposition 2.8. *La multiplication des ordinaux n'est pas commutative.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\omega \times 2 &= \omega \times 1^+ \\ &= \omega \times 1 + \omega \\ &= \omega \times 0^+ + \omega \\ &= \omega \times 0 + \omega + \omega \\ &= 0 + \omega + \omega \\ &= \omega + \omega\end{aligned}$$

En revanche, comme ω est un ordinal limite,

$$2 \times \omega = \sup\{2 \times n : n < \omega\} = \omega$$

□

Complétons un peu le dessin que nous avons fait dans la section sur l'addition. Munis de la multiplication, nous pouvons plus facilement décrire des ordinaux plus grands. Voici les ordinaux inférieurs à $\omega \times \omega$. Le k^{e} triangle représente les ordinaux entre $\omega \times k$ et $\omega \times (k + 1)$.



2.2 Élément neutre, élément absorbant

Proposition 2.9. *Pour tout ordinal α , $\alpha \times 0 = 0 \times \alpha = 0$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. On a par la définition de la multiplication, $\alpha \times 0 = 0$.

Montrons maintenant par induction sur α que pour tout ordinal α , $0 \times \alpha = 0$.

- $0 \times 0 = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $0 \times \alpha = 0$. On a alors

$$0 \times \alpha^+ = 0 \times \alpha + 0 = 0 + 0 = 0$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $0 \times \beta = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} 0 \times \alpha &= \sup\{0 \times \beta : \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{0\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Proposition 2.10. *Pour tout ordinal α , $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. On a

$$\alpha \times 1 = \alpha \times 0^+ = \alpha \times 0 + \alpha = 0 + \alpha = \alpha$$

Montrons maintenant par induction sur α que pour tout ordinal α , $1 \times \alpha = \alpha$.

- $1 \times 0 = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $1 \times \alpha = \alpha$. On a alors

$$1 \times \alpha^+ = 1 \times \alpha + 1 = \alpha + 1 = \alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $1 \times \beta = \beta$. On a alors

$$\begin{aligned} 1 \times \alpha &= \sup\{1 \times \beta : \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{\beta : \beta < \alpha\} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

□

Proposition 2.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \times \omega = \omega$.*

Démonstration. On a $n \times \omega = \sup E$ où

$$E = \{n \times p : p < \omega\} = \{n \times p : p \in \mathbb{N}\}$$

$E \subseteq \mathbb{N}$, donc ω majore E . De plus, pour tout $m < \omega$, m est un entier naturel et donc il existe un multiple de n qui est strictement supérieur à m . Ainsi, m ne majore pas E . Le plus petit majorant de E est donc ω . □

2.3 Compatibilité avec l'ordre

Proposition 2.12. *Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$.*

Si $\beta \leq \gamma$, alors $\beta \times \alpha \leq \gamma \times \alpha$.

La réciproque est fausse.

Démonstration. Concernant la réciproque, on a par exemple

$$\omega = 2 \times \omega \leq 1 \times \omega = \omega$$

Pourtant, $2 \not\leq 1$.

Supposons $\beta \leq \gamma$. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\beta \times \alpha \leq \gamma \times \alpha$.

- $\beta \times 0 = 0 = \gamma \times 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons $\beta \times \alpha \leq \gamma \times \alpha$. On a alors

$$\beta \times \alpha^+ = \beta \times \alpha + \beta \leq \gamma \times \alpha + \gamma = \gamma \times \alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \alpha$, $\beta \times \delta \leq \gamma \times \delta$. On a

$$\gamma \times \alpha = \sup\{\gamma \times \delta : \delta < \alpha\}$$

Ainsi, pour tout $\delta < \alpha$,

$$\beta \times \delta \leq \gamma \times \delta \leq \gamma \times \alpha$$

L'ordinal $\gamma \times \alpha$ majore donc l'ensemble $\{\beta \times \delta : \delta < \alpha\}$. Par minimalité de $\beta \times \alpha$, qui est la borne supérieure de cet ensemble, on en déduit

$$\beta \times \alpha \leq \gamma \times \alpha$$

□

Lemme 2.13. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$. On suppose $\alpha \neq 0$. Si $\beta < \gamma$, alors $\alpha \times \beta < \alpha \times \gamma$.

Démonstration. Montrons par induction sur γ que pour tout ordinal γ ,

$$\beta < \gamma \implies \alpha \times \beta < \alpha \times \gamma$$

- C'est clair si $\gamma = 0$ puisque $\beta < 0$ est impossible.
- Soit γ un ordinal. Supposons que $\beta < \gamma \implies \alpha \times \beta < \alpha \times \gamma$. Supposons $\beta < \gamma^+$, c'est à dire $\beta \leq \gamma$. On a deux cas à considérer.

Si $\beta < \gamma$, alors, par l'hypothèse d'induction,

$$\alpha \times \beta < \alpha \times \gamma \leq \alpha \times \gamma + \alpha = \alpha \times \gamma^+$$

Si $\beta = \gamma$, alors

$$\alpha \times \beta = \alpha \times \gamma < \alpha \times \gamma + \alpha = \alpha \times \gamma^+$$

La dernière inégalité est stricte, car $\alpha > 0$.

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \gamma$,

$$\beta < \delta \implies \alpha \times \beta < \alpha \times \delta$$

Supposons $\beta < \gamma$. Comme γ est un ordinal limite, on a aussi $\beta^+ < \gamma$. En appliquant l'hypothèse d'induction à β^+ , il vient $\alpha \times \beta^+ < \alpha \times \gamma$. Or, $\alpha \times \beta < \alpha \times \beta^+$, donc $\alpha \times \beta < \alpha \times \gamma$.

□

Proposition 2.14. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$. On suppose $\alpha \neq 0$. Alors,

$$\beta < \gamma \iff \alpha \times \beta < \alpha \times \gamma$$

Démonstration. Le sens direct, c'est la proposition précédente. De plus, si $\beta = \gamma$, alors $\alpha \times \beta = \alpha \times \gamma \not< \alpha \times \gamma$. De même, si $\beta > \gamma$, par la proposition précédente on a $\alpha \times \gamma < \alpha \times \beta$, donc $\alpha \times \beta \not< \alpha \times \gamma$. □

2.4 Division euclidienne

Proposition 2.15. [THÉORÈME D'ARCHIMÈDE]

Soient α et β deux ordinaux. On suppose $\beta \neq 0$. Il existe un unique ordinal γ tel que

$$\beta \times \gamma \leq \alpha < \beta \times \gamma^+$$

Démonstration. Remarquons que

$$\beta \times \alpha^+ = \beta \times \alpha + \beta \geq \alpha + \beta > \alpha$$

Ainsi, la classe

$$C = \{\gamma \in \text{ON} : \beta \times \gamma > \alpha\}$$

est non vide, puisqu'elle contient α^+ . La classe C possède donc un plus petit élément que nous noterons δ .

Tout d'abord, $\delta \in C$, donc $\beta \times \delta > \alpha$. Clairement, $\delta \neq 0$. Montrons que δ est un ordinal successeur. Pour cela, supposons que δ est un ordinal limite. On a pour tout $\gamma < \delta$, $\beta \times \gamma \leq \alpha$. De là, α majore l'ensemble $\{\beta \times \gamma : \gamma < \delta\}$ et donc, la borne supérieure de cet ensemble, qui est $\beta \times \delta$, vérifie

$$\beta \times \delta \leq \alpha$$

Contradiction. Ainsi, il existe un ordinal γ tel que $\delta = \gamma^+$. Comme $\gamma < \delta$, $\gamma \notin C$. Ainsi, $\beta \times \gamma < \alpha$. On a donc

$$\beta \times \gamma \leq \alpha < \beta \times \delta = \beta \times \gamma^+$$

Il reste à montrer l'unicité de γ . Soient $\gamma, \gamma' \in \text{ON}$. Supposons que

$$\beta \times \gamma \leq \alpha < \beta \times \gamma^+$$

$$\beta \times \gamma' \leq \alpha < \beta \times \gamma'^+$$

On a donc

$$\beta \times \gamma < \beta \times \gamma'$$

Comme $\beta \neq 0$, cela entraîne $\gamma < \gamma'^+$, et donc $\gamma \leq \gamma'$. De même, $\gamma' \leq \gamma$. Ainsi, $\gamma = \gamma'$. $\square$

Proposition 2.16. [DIVISION EUCLIDIENNE]

Soient α et β deux ordinaux. On suppose $\beta \neq 0$. Alors, il existe un unique couple (γ, δ) d'ordinaux tel que

$$\begin{cases} \alpha = \beta \times \gamma + \delta \\ \delta < \beta \end{cases}$$

Démonstration. Par le théorème d'Archimède, il existe $\gamma \in \text{ON}$ tel que

$$\beta \times \gamma \leq \alpha < \beta \times \gamma^+$$

Comme $\beta \times \gamma \leq \alpha$, il existe $\delta \in \text{ON}$ tel que

$$\alpha = \beta \times \gamma + \delta$$

On a alors

$$\beta \times \gamma + \delta < \beta \times \gamma^+ = \beta \times \gamma + \beta$$

d'où $\delta < \beta$ et l'existence. Pour montrer l'unicité, supposons que deux couples (γ, δ) et (γ', δ') conviennent. On a

$$\beta \times \gamma \leq \alpha < \beta \times \gamma + \delta < \beta \times \gamma + \gamma = \beta \times \gamma^+$$

et de même

$$\beta \times \gamma' \leq \alpha \leq \beta \times \gamma'^+$$

Par l'unicité du théorème d'Archimède, $\gamma = \gamma'$. De là, en reportant,

$$\alpha = \beta \times \gamma + \delta = \beta \times \gamma + \delta'$$

d'où $\delta = \delta'$. $\square$

2.5 Multiplication et bornes supérieures

Proposition 2.17. *Soit E un ensemble d'ordinaux. Soit $\alpha \in ON$. On a alors*

$$\sup\{\alpha \times \beta : \beta \in E\} = \alpha \times \sup(E)$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou si $E = \emptyset$, la propriété est évidente. Supposons donc $\alpha \neq 0$ et $E \neq \emptyset$.

Notons $F = \{\alpha \times \beta : \beta \in E\}$ et $\gamma = \sup E$. On a pour tout $\beta \in E$, $\beta \leq \gamma$ et donc

$$\alpha \times \beta \leq \alpha \times \gamma$$

Ainsi, $\alpha \times \gamma$ majore F .

Soit δ un majorant de F . Comme $\alpha \neq 0$, il existe par le théorème d'Archimède un (unique) ordinal ε tel que

$$\alpha \times \varepsilon \leq \delta < \alpha \times \varepsilon^+$$

Pour tout $\beta \in E$, on a

$$\alpha \times \beta \leq \delta < \alpha \times \varepsilon^+$$

et donc $\beta < \varepsilon^+$, d'où $\beta \leq \varepsilon$. Ainsi, ε majore E . Par minimalité de γ , $\gamma \leq \varepsilon$. et donc

$$\alpha \times \gamma \leq \alpha \times \varepsilon \leq \delta$$

Ainsi, $\alpha \times \gamma$ est le plus petit majorant de F . $\square$

Remarque. La remarque que nous avons faite pour l'addition s'applique aussi à la multiplication. Considérons la fonction $f : \alpha \mapsto \alpha \times \omega$. On a

$$f(\mathbb{N}) = \{n \times \omega : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \omega\}$$

et donc $\sup f(\mathbb{N}) = \omega$. En revanche,

$$f(\sup \mathbb{N}) = f(\omega) = \omega \times \omega \neq \omega$$

2.6 Distributivité

Proposition 2.18. *La multiplication est « distributive à gauche » par rapport à l'addition. Pour tous ordinaux α, β, γ ,*

$$\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$$

En revanche, elle n'est pas distributive à droite.

Démonstration. Pour la non-distributivité à droite, il suffit de constater que

$$(1 + 1) \times \omega = 2 \times \omega = \omega$$

alors que

$$1 \times \omega + 1 \times \omega = \omega + \omega \neq \omega$$

Montrons maintenant la distributivité à gauche par induction sur γ .

- $\alpha \times (\beta + 0) = \alpha \times \beta = \alpha \times \beta + \alpha \times 0$.
- Soit γ un ordinal. Supposons que $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$. On a alors

$$\begin{aligned} \alpha \times (\beta + \gamma^+) &= \alpha \times (\beta + \gamma)^+ \\ &= \alpha \times (\beta + \gamma) + \alpha \\ &= \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma + \alpha \\ &= \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma^+ \end{aligned}$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$,

$$\alpha \times (\beta + \delta) = \alpha \times \beta + \alpha \times \delta$$

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha \times (\beta + \gamma) &= \alpha \times \sup\{\beta + \delta : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha \times (\beta + \delta) : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha \times \beta + \alpha \times \delta : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha \times \beta + \sup\{\alpha \times \delta : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma \end{aligned}$$

□

2.7 Associativité

Proposition 2.19. *La multiplication des ordinaux est associative. Pour tous ordinaux α, β, γ ,*

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur γ .

- $(\alpha \times \beta) \times 0 = 0 = \alpha \times 0 = \alpha \times (\beta \times 0)$.

- Soit γ un ordinal. Supposons que $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$. On a alors

$$\begin{aligned}
 (\alpha \times \beta) \times \gamma^+ &= (\alpha \times \beta) \times \gamma + \alpha \times \beta \\
 &= \alpha \times (\beta \times \gamma) + \alpha \times \beta \\
 &= \alpha \times (\beta \times \gamma + \beta) \\
 &= \alpha \times (\beta \times \gamma^+)
 \end{aligned}$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$,

$$(\alpha \times \beta) \times \delta = \alpha \times (\beta \times \delta)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 (\alpha \times \beta) \times \gamma &= \sup\{(\alpha \times \beta) \times \delta : \delta < \gamma\} \\
 &= \sup\{\alpha \times (\beta \times \delta) : \delta < \gamma\} \\
 &= \alpha \times \sup\{\beta \times \delta : \delta < \gamma\} \\
 &= \alpha \times (\beta \times \gamma)
 \end{aligned}$$

□

Nous voici en possession des deux opérations « de base » sur les ordinaux : l'addition et la multiplication. Pour aller encore plus loin, il nous faut maintenant parler de *l'exponentiation*. Il y aura là beaucoup à dire, aussi nous réservons l'étude des puissances à un chapitre complet.

2.8 Résumé

Voici le résumé des principales propriétés de la multiplication des ordinaux. Dans le cadre ci-dessous, α , β , γ et δ désignent des ordinaux quelconques.

$$\begin{aligned}
 \alpha \times 0 &= 0 \times \alpha = 0 \\
 \alpha \times 1 &= 1 \times \alpha = \alpha \\
 (\alpha \times \beta) \times \gamma &= \alpha \times (\beta \times \gamma) \\
 \alpha \times (\beta + \gamma) &= \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma \\
 \beta \leq \gamma &\implies \beta \times \alpha \leq \gamma \times \alpha \\
 \text{Si } \alpha \neq 0, \text{ alors } \beta < \gamma &\iff \alpha \times \beta < \alpha \times \gamma \\
 \text{Si } \beta \neq 0, \text{ alors } \exists! \gamma, \exists! \delta, (\alpha = \beta \times \gamma + \delta \wedge \delta < \beta)
 \end{aligned}$$

3 Les points fixes de l'addition

Terminons ce chapitre par un petit exercice, la résolution d'une équation. Soit α un ordinal fixé non nul. Quels sont les ordinaux β tels que $\beta + \alpha = \alpha$? Il y a évidemment $\beta = 0$, mais ce n'est pas le seul.

Proposition 2.20. *Soient α et β deux ordinaux. On a*

$$\beta + \alpha = \alpha \iff \exists \gamma \in \text{ON}, \alpha = \beta \times \omega + \gamma$$

Démonstration. Si $\beta = 0$ l'équivalence est évidente. Supposons donc $\beta \neq 0$.

($\Rightarrow$) Supposons que $\beta + \alpha = \alpha$. Effectuons la division euclidienne de α par β . Il vient

$$\alpha = \beta \times \varepsilon + \delta$$

où ε et δ sont deux ordinaux et $\delta < \beta$. De là,

$$\beta \times \varepsilon + \delta = \beta + \beta \times \varepsilon + \delta$$

ou encore, en simplifiant par δ et en factorisant,

$$\beta \times \varepsilon = \beta \times (1 + \varepsilon)$$

Comme $\beta \neq 0$, on en déduit $\varepsilon = 1 + \varepsilon$, c'est à dire $\varepsilon \geq \omega$. Ainsi,

$$\alpha = \beta \times \varepsilon + \delta \geq \beta \times \omega + 0 = \beta \times \omega$$

et donc il existe $\gamma \in \text{ON}$ tel que $\alpha = \beta \times \omega + \gamma$.

($\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $\gamma \in \text{ON}$ tel que $\alpha = \beta \times \omega + \gamma$. On a alors

$$\begin{aligned} \beta + \alpha &= \beta + \beta \times \omega + \gamma \\ &= \beta \times (1 + \omega) + \gamma \\ &= \beta \times \omega + \gamma \\ &= \alpha \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Continuité

1 Une topologie sur ON

Dans tout ensemble ordonné il est possible de définir une topologie, appelée la *topologie de l'ordre*, dont les ouverts sont bâtis à partir des intervalles. Bien que les ordinaux forment une classe propre, les intervalles de la classe ON sont des ensembles. Nous allons donc pouvoir définir sur ON une topologie à partir de ces intervalles, comme on le fait par exemple sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1.1 Les ouverts

Définition 3.1. Les intervalles *ouverts* de ON sont les intervalles $] \alpha, \beta [$ et $] 0, \beta [$, où $\alpha, \beta \in \text{ON}$.

Un sous-ensemble de ON est un *ouvert* s'il est la réunion d'un ensemble d'intervalles ouverts.

Remarquons que pour tous ordinaux α, β , $] \alpha, \beta [=] \alpha, \beta^+ [$ est aussi un intervalle ouvert.

On définit ainsi sur ON une topologie, la *topologie de l'ordre*.

Définition 3.2. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Un *voisinage* de α est un sous-ensemble V de ON contenant un ouvert qui contient α .

Notation. Nous noterons $\mathcal{V}(\alpha)$ la classe des voisinages de l'ordinal α .

Proposition 3.1. Soit $\alpha \in \text{ON}$.

- Si α est 0 ou un ordinal successeur, alors une base de voisinages de α est constituée par le seul singleton $\{\alpha\}$.
- Si α est un ordinal limite, une base de voisinages de α est constituée des intervalles $] \gamma, \alpha [$ où $\gamma < \alpha$.

Démonstration.

- $\{0\} =] 0, 1 [$ est ouvert et si $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur, $\{\alpha\} =] \beta, \alpha [$ est ouvert.
- Supposons que α est un ordinal limite. Soit V un voisinage de α . L'ensemble V contient donc un ouvert Ω qui contient α . Il existe alors $\gamma < \alpha < \delta$ tels que $] \gamma, \delta [\subseteq \Omega$. De là,

$$] \gamma, \alpha [\subseteq] \gamma, \delta [\subseteq \Omega \subseteq V$$

□

Les points intéressants pour la topologie de ON sont donc les ordinaux limites : si α est un ordinal limite, et V est un voisinage de α , alors il existe $\gamma < \alpha$ tel que $] \gamma, \alpha [\subseteq V$. Cet intervalle contient une infinité d'éléments (entre autre les ordinaux $\gamma + n$ où $n \in \mathbb{N}^*$), donc V n'est pas un ensemble « trivial ».

1.2 Propriétés des voisinages

Proposition 3.2. *Soit $\alpha \in ON$. L'intersection de tous les voisinages de α est α .*

Démonstration. C'est clair si $\alpha = 0$ ou si α est un ordinal successeur, puisque dans ce cas, $\{\alpha\}$ est un voisinage de α . Supposons maintenant que α est un ordinal limite.

Pour tout $\beta < \alpha$, il existe $\gamma \in ON$ tel que $\beta < \gamma < \alpha$, par exemple $\gamma = \beta^+$. Ainsi, $\beta \notin]\gamma, \alpha]$, donc β n'est pas dans l'intersection des voisinages de α .

Pour tout $\beta > \alpha$, $\beta \notin]\gamma, \alpha]$, où γ est un ordinal tel que $\gamma < \alpha$. Ainsi, β n'est pas dans l'intersection des voisinages de α .

En conclusion, seul α est dans l'intersection des voisinages de α . $\square$

Il s'avère que la topologie que nous venons de définir sur ON est *séparée*.

Proposition 3.3. *Soient α et β deux ordinaux distincts. Il existe un voisinage V de α et un voisinage V' de β tels que $V \cap V' = \emptyset$.*

Démonstration. Il y a plusieurs cas à considérer. Traitons le cas où $0 < \alpha < \beta$. Les autres cas sont laissés en exercice. Les intervalles $]0, \alpha]$ et $] \alpha, \beta]$ sont un voisinage de α et un voisinage de β , et

$$]0, \alpha] \cap] \alpha, \beta] = \emptyset$$

$\square$

Maintenant que ON est muni d'une topologie, on peut y définir toutes les notions liées aux espaces topologiques. Par exemple, la notion de point adhérent.

1.3 Adhérence

Définition 3.3. Soit C une sous-classe de ON . Soit $\alpha \in ON$. L'ordinal α est *adhérent* à C si pour tout voisinage V de α , $V \cap C \neq \emptyset$.

Proposition 3.4. *Soit E un ensemble non vide d'ordinaux. Alors, $\sup E$ est adhérent à E .*

Démonstration. Notons $\alpha = \sup E$. Si $\alpha = 0$, la conclusion est évidente. Supposons donc $\alpha \neq 0$. Soit V un voisinage de α . Il existe $\beta < \alpha$ tel que $] \beta, \alpha] \subseteq V$. L'ordinal β ne majore pas E , donc il existe $\gamma \in E$ tel que $\beta < \gamma \leq \alpha$. Ainsi, $] \beta, \alpha] \cap E \neq \emptyset$ et, a fortiori, $V \cap E \neq \emptyset$. $\square$

Pour toute sous-classe C de ON , nous noterons $\overline{C}$ l'ensemble des points adhérents à C . La classe $\overline{C}$ est l'*adhérence* de C .

2 Notion de limite

2.1 Introduction

Définition 3.4. Soit $f : C \subseteq \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ une fonction définie sur une sous-classe C de ON . Soit $\alpha \in \overline{C}$. Soit $\lambda \in \text{ON}$. La fonction f tend vers λ en α si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\lambda), \exists V \in \mathcal{V}(\alpha), f(C \cap V) \subseteq W$$

Nous noterons $f(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow \alpha]{} \lambda$.

Proposition 3.5. Si une fonction admet une limite en un point, cette limite est unique.

Démonstration. Soit $f : C \subseteq \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$. Soit $\alpha \in \overline{C}$. Soient $\lambda, \lambda' \in \text{ON}$. Supposons que $f(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow \alpha]{} \lambda$ et $f(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow \alpha]{} \lambda'$.

Soient W un voisinage de λ et W' un voisinage de λ' . Il existe $V, V' \in \mathcal{V}(\alpha)$ tels que $f(C \cap V) \subseteq W$ et $f(C \cap V') \subseteq W'$. On a alors

$$f(C \cap V \cap V') \subseteq W \cap W'$$

$V \cap V'$ est un voisinage de α . Comme α est adhérent à C , on a donc $C \cap V \cap V' \neq \emptyset$, et donc $f(C \cap V \cap V') \neq \emptyset$. A fortiori, $W \cap W' \neq \emptyset$. Ceci étant vrai pour tous les voisinages de λ et λ' , il en résulte $\lambda = \lambda'$. $\square$

Proposition 3.6. Soit $f : C \subseteq \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$. Soit $\alpha \in C$. Si f a une limite en α , alors cette limite est $f(\alpha)$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \text{ON}$. Supposons que $f(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow \alpha]{} \lambda$. Pour tout voisinage W de λ , il existe un voisinage V de α tel que $f(C \cap V) \subseteq W$. Or, $\alpha \in C \cap V$, donc $f(\alpha) \in W$. Ainsi,

$$f(\alpha) \in \bigcap_{W \in \mathcal{V}(\lambda)} W = \{\lambda\}$$

D'où $f(\alpha) = \lambda$. $\square$

La notion de limite n'est intéressante que lorsque α est un ordinal limite. En effet, si $\alpha = 0$ ou α est un ordinal successeur, alors $\alpha \in \overline{C}$ si et seulement si $\alpha \in C$ (car $\{\alpha\}$ est un voisinage de α qui rencontre C). De là, pour tout voisinage W de $f(\alpha)$, en prenant $V = \{\alpha\}$ on obtient

$$f(C \cap V) = f(\{\alpha\}) = \{f(\alpha)\} \in W$$

Ainsi, f tend vers $f(\alpha)$ en α .

2.2 Fonctions continues

Définition 3.5. $f : C \subseteq \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ une fonction définie sur une sous-classe C de ON . Soit $\alpha \in C$. La fonction f est *continue* en α si f a une limite en α (cette limite étant forcément $f(\alpha)$, puisque $\alpha \in C$).

La fonction f est *continue sur C* si pour tout $\alpha \in C$, f est continue en α .

Remarquons qu'une fonction est automatiquement continue en 0 ou en un ordinal successeur. Dans la suite, nous concentrerons donc nos preuves de continuité sur les ordinaux limites.

2.3 Un exemple

Proposition 3.7. Soit $\alpha \in \text{ON}$. La fonction $f : \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ définie par $f(\beta) = \alpha + \beta$ est continue sur ON .

Démonstration. Soit γ un ordinal limite. Montrons que $f(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \gamma} f(\gamma)$. Soit W un voisinage de $\alpha + \gamma$. W contient un intervalle ouvert $]\delta, \alpha + \gamma]$, où $\delta < \alpha + \gamma$. Si $\delta \leq \alpha$, alors $]\alpha^+, \alpha + \gamma] \subseteq]\delta, \alpha + \gamma] \subseteq W$. On peut donc sans restriction supposer que $\delta > \alpha$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $\delta = \alpha + \varepsilon$. Remarquons que

$$\alpha + \varepsilon < \alpha + \gamma$$

et donc $\varepsilon < \gamma$. Posons $V =]\varepsilon, \gamma]$. L'ensemble V est un voisinage de γ . Pour tout $\beta \in V$, on a alors

$$\delta = \alpha + \varepsilon < \alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$$

c'est à dire $f(\beta) \in]\delta, \alpha + \gamma] \subseteq W$. La fonction f est donc continue en γ . $\square$

Nous pourrions aussi montrer que la fonction $\beta \mapsto \alpha \times \beta$ est continue sur ON . Mais dans le paragraphe suivant, un résultat nous donnera automatiquement cette propriété.

2.4 Continuité et bornes supérieures

Nous avons vu dans la section sur l'addition une propriété remarquable : si E est un ensemble non vide d'ordinaux et $\alpha \in \text{Ord}$, alors

$$\sup\{\alpha + \beta : \beta \in E\} = \alpha + \sup E$$

Écrivons cette propriété de façon un peu différente. Soit $f : \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ définie pour tout ordinal β par $f(\beta) = \alpha + \beta$. L'égalité ci-dessus s'écrit maintenant

$$\sup\{f(\beta) : \beta \in E\} = f(\sup E)$$

ou, encore mieux,

$$\sup f(E) = f(\sup(E))$$

où $f(E)$ désigne l'image directe de l'ensemble E par la fonction f . Cette propriété est en fait vraie pour toutes les fonctions continues croissantes.

Proposition 3.8. *Soit $f : ON \longrightarrow ON$ une fonction continue strictement croissante. Pour tout ensemble non vide E d'ordinaux, on a*

$$\sup f(E) = f(\sup E)$$

Démonstration. Si $\sup E = 0$ ou $\sup E$ est un ordinal successeur, on vérifie facilement que $\sup E = \max E \in E$. Par la croissance de f , $\max f(E) = f(\max E)$.

Supposons maintenant que $\alpha = \sup E$ est un ordinal limite. Comme la fonction f est croissante, on a pour tout $\beta \in E$, $f(\beta) \leq f(\alpha)$. Ainsi, $f(\alpha)$ majore $f(E)$.

Soit $\delta < f(\alpha)$. Par la continuité de f en α , il existe $V \in \mathcal{V}(\alpha)$ tel que $f(V) \subseteq]\delta, f(\alpha)[$. Soit $\gamma < \alpha$ tel que $]\gamma, \alpha[\subseteq V$. Comme $\alpha = \sup E$, il existe $\beta \in E$ tel que $\beta \in]\gamma, \alpha[$. De là, $f(\beta) \in]\delta, f(\alpha)[$ et donc $\delta < f(\beta)$. Ainsi, δ ne majore pas $f(E)$. En conclusion, $f(\alpha)$ est le plus petit majorant de $f(E)$. $\square$

Cette propriété possède une réciproque.

Proposition 3.9. *Soit $f : ON \longrightarrow ON$ une fonction strictement croissante. On suppose que pour tout ensemble non vide E d'ordinaux, on a*

$$\sup f(E) = f(\sup E)$$

Alors f est continue sur ON .

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer que f est continue en les ordinaux limites. Soit donc α un ordinal limite. Soit W un voisinage de $f(\alpha)$. Comme f est strictement croissante et $\alpha > 0$, on a $f(\alpha) \neq 0$. Il existe donc $\delta < f(\alpha)$ tel que $]\delta, f(\alpha)[\subseteq W$. Soit $E =]0, \alpha[$. On a $\alpha = \sup E$ et donc

$$f(\alpha) = f(\sup E) = \sup f(E)$$

Comme $\delta < f(\alpha)$, δ ne majore pas $f(E)$. Il existe ainsi $\beta \in E$ tel que $\delta < f(\beta) \leq f(\alpha)$.

Posons $V =]\beta, \alpha[$. Soit $\gamma \in V$. On a $\beta < \gamma \leq \alpha$ et donc, par la croissance stricte de f ,

$$f(\beta) < f(\gamma) \leq f(\alpha)$$

Ainsi, $f(\gamma) \in W$ et donc $f(V) \subseteq W$, d'où la continuité de f en α . $\square$

Nous avons ainsi en corollaire le résultat suivant :

Proposition 3.10. *Soit $\alpha \in ON$.*

- *La fonction $\beta \longmapsto \alpha + \beta$ est continue sur ON .*
- *La fonction $\beta \longmapsto \alpha \times \beta$ est continue sur ON .*

Remarque. La fonction $f : ON \longrightarrow ON$ définie par $f(\alpha) = \alpha + \omega$ n'est pas continue. La fonction f est bien croissante. Pourtant, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n + \omega = \omega,$$

$$f(\mathbb{N}) = \{n + \omega : n \in \mathbb{N}\} = \{\omega\}$$

et donc $\sup f(\mathbb{N}) = \omega$. En revanche,

$$f(\sup \mathbb{N}) = f(\omega) = \omega + \omega \neq \omega$$

De même, la fonction $g : \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ définie par $g(\alpha) = \alpha \times \omega$ n'est pas continue. La fonction g est croissante. Cependant, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \times \omega = 0$ ou ω ,

$$g(\mathbb{N}) = \{n \times \omega : n \in \mathbb{N}\} = \{0, \omega\}$$

et donc $\sup g(\mathbb{N}) = \omega$. En revanche,

$$g(\sup \mathbb{N}) = g(\omega) = \omega \times \omega \neq \omega$$

3 Suites transfinies

3.1 Introduction

Définition 3.6. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Une *suite d'ordinaux* de longueur α est une fonction

$$u : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \text{ON}$$

Nous parlerons de α -suite pour exprimer qu'une suite est de longueur α . En particulier, une ω -suite est une suite au sens usuel du terme.

Comme pour les suites usuelles, l'image de l'ordinal $\beta < \alpha$ par la suite u est notée u_β . La suite u elle-même est notée $u = (u_\beta)_{\beta < \alpha}$.

3.2 Limite d'une suite

Comme une suite transfinie est une fonction, on dispose bien entendu de la notion de limite. Ce qui nous intéresse concernant la α -suite u est évidemment la limite éventuelle de u_β lorsque β tend vers α . Pour cela, il est nécessaire que α soit adhérent à l'ensemble $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$, et donc que α soit un ordinal limite. La proposition ci-dessous ne fait que répéter la définition de limite pour les fonctions.

Proposition 3.11. Soit α un ordinal limite. Soit u une α -suite. Soit $\lambda \in \text{ON}$. La suite u tend en α vers l'ordinal λ si et seulement si

$$\forall W \in \mathcal{V}(\lambda), \exists \gamma < \alpha, \forall \beta < \alpha, (\beta > \gamma \implies u_\beta \in W)$$

Nous écrirons plus simplement dans la suite

$$\forall W \in \mathcal{V}(\lambda), \exists \gamma < \alpha, \forall \beta > \gamma, u_\beta \in W$$

étant sous-entendu que $\beta < \alpha$.

On note évidemment $u_\beta \xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \lambda$.

Regardons ce qui se passe lorsque $\lambda = 0$ ou λ est un ordinal successeur. Dans ce cas, $W = \{\lambda\}$ est un voisinage de λ . Ainsi, si u tend vers λ , on a

$$\exists \gamma < \alpha, \forall \beta > \gamma, u_\beta = \lambda$$

Ainsi, la suite u est *stationnaire*. La réciproque est évidente : si u est stationnaire, égale à λ , alors u tend vers λ , et ceci que λ soit un ordinal successeur ou un ordinal limite.

Dans le cas où λ est un ordinal limite, la situation est plus intéressante. On a alors, en reprenant la définition de limite, la propriété suivante.

Proposition 3.12. *Soit α un ordinal limite. Soit u une α -suite. Soit λ un ordinal limite. La suite u tend en α vers l'ordinal λ si et seulement si*

$$\forall \delta < \lambda, \exists \gamma < \alpha, \forall \beta > \gamma, \delta < u_\beta \leq \lambda$$

3.3 Suites décroissantes

Les suites décroissantes d'ordinaux sont forcément des suites très simples.

Proposition 3.13. *Soit α un ordinal limite. Soit u une α -suite décroissante d'ordinaux. Alors, la suite u est stationnaire.*

Démonstration. Soit

$$C = \{u_\beta : \beta < \alpha\}$$

La classe non vide d'ordinaux C (en fait, C est un ensemble par le schéma d'axiomes de remplacement) possède un plus petit élément λ . L'ensemble

$$E = \{\gamma < \alpha : u_\gamma = \lambda\}$$

est un ensemble non vide d'ordinaux, il possède donc un plus petit élément que nous noterons γ . Pour tout ordinal $\beta \in \llbracket \gamma, \alpha \rrbracket$, on a par la décroissance de u , $u_\beta \leq u_\gamma = \lambda$. De plus, $u_\beta \in C$ donc $u_\beta \geq \lambda$. Ainsi, $u_\beta = \lambda$. $\square$

Toute α -suite d'ordinaux, étant stationnaire, est donc convergente. Remarquons pour en finir avec les suites décroissantes le résultat suivant.

Proposition 3.14. *Soit α un ordinal infini. Il n'existe pas de α -suite d'ordinaux strictement décroissante.*

Démonstration. Soit u une α -suite strictement décroissante d'ordinaux. Comme α est infini, on a $\alpha \geq \omega$. La ω -suite $(u_n)_{n < \omega}$ est une suite décroissante d'ordinaux. Par la proposition précédente elle est stationnaire. Il existe donc deux entiers naturels $m < n$ tels que $u_m = u_n$, ce qui contredit la décroissance stricte. $\square$

Passons maintenant au cas des suites croissantes d'ordinaux. La situation est très simple.

3.4 Suites croissantes

Proposition 3.15. *Soit α un ordinal limite. Soit u une α -suite croissante. Alors la suite u converge.*

Démonstration. Considérons la classe

$$C = \{u_\beta : \beta < \alpha\}$$

Par le schéma d'axiomes de remplacement, C est un ensemble d'ordinaux. L'ensemble C possède donc une borne supérieure λ . Montrons que u tend vers λ . Deux cas surviennent, selon que $\lambda \in C$ ou pas.

- Cas 1, $\lambda \in C$. Dans ce cas, facilement, la suite u est stationnaire. Il existe $\delta < \alpha$ tel que pour tout $\beta \in \llbracket \delta, \alpha \rrbracket$, on ait $u_\beta = \lambda$. La suite u tend donc vers λ .
- Cas 2, $\lambda \notin C$. Soit $\gamma < \lambda$. L'ordinal γ ne majore pas C . Il existe donc $\delta < \alpha$ tel que $u_\delta > \gamma$. Par la croissance de u , on a alors pour tout $\beta \in \llbracket \delta, \alpha \rrbracket$,

$$\gamma < u_\delta \leq u_\beta < \lambda$$

où la dernière inégalité résulte de ce que $u_\beta \in C$, et $\lambda \notin C$. Dit autrement,

$$\forall \beta \in \llbracket \delta, \alpha \rrbracket, u_\beta \in \llbracket \gamma, \lambda \rrbracket$$

ce qui est précisément la définition de limite. Ainsi, la suite u tend vers λ . Remarquons que dans ce cas, λ est nécessairement un ordinal limite. En effet, u tend vers λ mais ne prend pas la valeur λ .

□

3.5 Limites de fonctions, limites de suites

Proposition 3.16. *Soit $f : C \subseteq ON \longrightarrow ON$. Soit $\alpha \in \overline{C}$. Soit $\lambda \in ON$. On suppose que $f(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \lambda$. Alors, pour tout ordinal limite δ , pour toute δ -suite $(u_\beta)_{\beta < \delta}$ de points de C qui converge vers α , la δ -suite $(f(u_\beta))_{\beta < \delta}$ converge vers λ .*

Démonstration. Soit δ un ordinal limite. Soit $(u_\beta)_{\beta < \delta}$ une δ -suite de points de C qui converge vers α . Soit $W \in \mathcal{V}(\lambda)$. Il existe $V \in \mathcal{V}(\alpha)$ tel que $f(C \cap V) \subseteq W$. Comme la δ -suite u converge vers α , il existe $\gamma < \alpha$ tel que pour tout $\beta > \gamma$, $u_\beta \in V$. On a aussi $u_\beta \in C$, donc $u_\beta \in C \cap V$. De là, $f(u_\beta) \in f(C \cap V) \subseteq W$. Nous avons donc prouvé

$$\forall W \in \mathcal{V}(\lambda), \exists \gamma < \delta, \forall \beta > \gamma, f(u_\beta) \in W$$

ce qui prouve la convergence de $f(u_\beta)$ vers λ . □

Cette proposition admet une réciproque. Avant de donner cette réciproque nous devons dire quelques mots sur la *cofinalité* des ordinaux.

Définition 3.7. Soit α un ordinal limite. La *cofinalité* de α est le plus petit ordinal limite δ tel qu'il existe une δ -suite strictement croissante d'ordinaux qui converge vers α .

On note $cf(\alpha)$ la cofinalité de α .

Remarquons qu'il existe bien un tel δ . En effet, la α -suite $(\beta)_{\beta < \alpha}$ est une suite strictement croissante qui tend vers α .

Exemples. Remarquons que la cofinalité d'un ordinal limite étant aussi un ordinal limite, celle-ci est donc supérieure ou égale à ω . Pour commencer par l'exemple le plus simple, $cf(\omega) = \omega$ puisque la suite $(n)_{n < \omega}$ est strictement croissante et converge vers ω . Autre exemple, $cf(\omega \times \omega) = \omega$ car la suite $(\omega \times n)_{n < \omega}$ est strictement croissante et converge vers $\omega \times \omega$.

Il n'est à ce stade du livre pas possible de donner des exemples d'ordinaux dont la cofinalité n'est pas ω . Cela dit, gardons à l'esprit que de tels ordinaux existent.

Venons-en à notre réciproque.

Proposition 3.17. Soit $f : C \subseteq ON \rightarrow ON$. Soit $\alpha \in \overline{C}$ un ordinal limite. Soit $\delta = cf(\alpha)$. Soit $\lambda \in ON$. On suppose que pour toute δ -suite $(u_\beta)_{\beta < \delta}$ de points de C qui converge vers α , la δ -suite $(f(u_\beta))_{\beta < \delta}$ converge vers λ . Alors, $f(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \lambda$.

Démonstration. Si $\alpha = 0$ ou α est un ordinal successeur, une δ -suite croissante qui tend vers α est stationnaire et égale à α . La δ -suites des images par f est aussi stationnaire, et égale à $f(\alpha)$. On a donc $\lambda = f(\alpha)$. Comme f est automatiquement continue en α , la conclusion est immédiate. Supposons dorénavant que α est un ordinal limite. Montrons la contraposée de l'implication.

Supposons que $f(\beta)$ ne tend pas vers λ lorsque β tend vers α . On a donc

$$\exists W \in \mathcal{V}(\lambda), \forall V \in \mathcal{V}(\alpha), \exists \beta \in C \cap V, f(\beta) \notin W$$

Donnons-nous un tel voisinage W de λ . Soit $(v_\beta)_{\beta < \delta}$ une δ -suite strictement croissante qui tend vers α . Pour tout ordinal $\beta < \delta$, l'intervalle $V_\beta = \llbracket v_\beta, \alpha \rrbracket$ est un voisinage de α . Il existe donc $u_\beta \in C \cap V_\beta$ tel que $f(u_\beta) \notin W$.

Facilement, la suite $(u_\beta)_{\beta < \delta}$ est une δ -suite de points de C qui converge vers α . Cependant, les ordinaux $f(u_\beta)$ n'appartiennent pas à W , donc $f(u_\beta)$ ne tend pas vers λ lorsque β tend vers δ . $\square$

Chapitre 4

Puissances

1 Puissances

1.1 La définition

Définition 4.1. Soit $\alpha \in \text{ON}$. On définit par induction sur β l'ordinal α^β .

- $\alpha^0 = 1$.
- Pour tout ordinal β , $\alpha^{\beta+} = \alpha^\beta \times \alpha$.
- Pour tout ordinal limite non nul β , $\alpha^\beta = \sup\{\alpha^\gamma : \gamma < \beta\}$.

Nous appellerons l'opération $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha^\beta$ l'opération d'*exponentiation*.

Remarquons que pour les ordinaux finis, cette définition redonne les puissances usuelles des entiers naturels. Toujours aucune ambiguïté, donc, pour notre identification des ordinaux finis avec les entiers naturels.

Exercice. Montrer que pour tout ordinal α , $\alpha^2 = \alpha \times \alpha$ et $\alpha^3 = \alpha \times \alpha \times \alpha$.

Exercice. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^\omega = \omega$.

Commençons par les puissances dans lesquelles interviennent 0 ou 1.

Proposition 4.1. Pour tout ordinal α ,

- $\alpha^0 = 1$.
- $0^0 = 1$ et si $\alpha \neq 0$, $0^\alpha = 0$.
- $\alpha^1 = \alpha$.
- $1^\alpha = 1$.

Démonstration. En exercice. Soit cela résulte de la définition des puissances, soit c'est une induction facile sur α . $\square$

Proposition 4.2. L'opération d'exponentiation n'est pas commutative.

Démonstration. On s'en doute, vu que $2^3 = 8$ alors que $3^2 = 9$. Mais donnons un exemple plus instructif. Montrons que $\omega^2 \neq 2^\omega$. On a $\omega^2 = \omega \times \omega > \omega$. En revanche, $2^\omega = \omega$. $\square$

Remarquons que contrairement à ce qui se passe pour les entiers naturels, à savoir que si n est un « grand » entier, alors n^2 est « beaucoup plus petit » que 2^n , on a $2^\omega < \omega^2$. Attention, donc, aux idées reçues.

Complétons le schéma que nous avons fait pour la multiplication. Voici les ordinaux inférieurs à ω^8 . On voit sur le dessin 8 « paquets » d'ordinaux. Le k^{e} paquet représente les ordinaux entre ω^k et ω^{k+1} .

1.2 Compatibilité avec l'ordre

Proposition 4.3. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$.

Si $\beta \leq \gamma$, alors $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

FIGURE 4.1 – Les ordinaux inférieurs à ω^8

La réciproque est fausse.

Démonstration. Concernant la réciproque, on a par exemple

$$\omega = 3^\omega \leq 2^\omega = \omega$$

Pourtant, $3 \not\leq 2$.

Supposons $\beta \leq \gamma$. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

- $\beta^0 = 1 = \gamma^0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$. On a alors

$$\beta^{\alpha^+} = \beta^\alpha \times \beta \leq \gamma^\alpha \times \gamma = \gamma^{\alpha^+}$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \alpha$, $\beta^\delta \leq \gamma^\delta$. On a

$$\gamma^\alpha = \sup\{\gamma^\delta : \delta < \alpha\}$$

Ainsi, pour tout $\delta < \alpha$,

$$\beta^\delta \leq \gamma^\delta \leq \gamma^\alpha$$

L'ordinal γ^α majore donc l'ensemble $\{\beta^\delta : \delta < \alpha\}$. Par minimalité de β^α , qui est la borne supérieure de cet ensemble, on en déduit

$$\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$$

□

Lemme 4.4. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$. On suppose $\alpha \geq 2$. Si $\beta < \gamma$, alors $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

Démonstration. Montrons par induction sur γ que pour tout ordinal γ ,

$$\beta < \gamma \implies \alpha^\beta < \alpha^\gamma$$

- C'est clair si $\gamma = 0$ puisque $\beta < 0$ est impossible.

- Soit γ un ordinal. Supposons que $\beta < \gamma \implies \alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Supposons $\beta < \gamma^+$, c'est à dire $\beta \leq \gamma$. On a deux cas à considérer.

Si $\beta < \gamma$, alors, par l'hypothèse d'induction,

$$\alpha^\beta < \alpha^\gamma \leq \alpha^\gamma \times \alpha = \alpha^{\gamma^+}$$

Si $\beta = \gamma$, alors

$$\alpha^\beta = \alpha^\gamma < \alpha^\gamma \times \alpha = \alpha^{\gamma^+}$$

La dernière inégalité est stricte, car $\alpha > 1$.

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \gamma$,

$$\beta < \delta \implies \alpha^\beta < \alpha^\delta$$

Supposons $\beta < \gamma$. Comme γ est un ordinal limite, on a aussi $\beta^+ < \gamma$. En appliquant l'hypothèse d'induction à β^+ , il vient $\alpha^{\beta^+} < \alpha^\gamma$. Or, $\alpha^\beta < \alpha^{\beta^+}$, donc $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.

□

Proposition 4.5. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$. On suppose $\alpha \geq 2$. Alors,

$$\beta < \gamma \iff \alpha^\beta < \alpha^\gamma$$

Démonstration. Le sens direct, c'est la proposition précédente. De plus, si $\beta = \gamma$, alors $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \not< \alpha^\gamma$. De même, si $\beta > \gamma$, par la proposition précédente on a $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$, donc $\alpha^\beta \not< \alpha^\gamma$. □

1.3 Continuité de l'exponentiation

Lemme 4.6. Soit β un ordinal. On suppose $\beta \geq 2$. Alors, pour tout ordinal γ , $\beta^\gamma \geq \gamma$.

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur γ .

- $\beta^0 = 1 \geq 0$.
- $\beta^1 = \beta \geq 1$.
- Soit $\gamma \in \text{ON}$, $\gamma \geq 1$. Supposons que $\beta^\gamma \geq \gamma$. On a alors

$$\beta^{\gamma^+} = \beta^\gamma \times \beta \geq \gamma \times \beta \geq \gamma \times 2 = \gamma + \gamma \geq \gamma + 1 = \gamma^+$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$, $\beta^\delta \geq \delta$. On a

$$\beta^\gamma = \sup\{\beta^\delta : \delta < \gamma\}$$

Supposons que $\beta^\gamma < \gamma$. Comme γ est un ordinal limite, il existe un ordinal δ tel que

$$\beta^\gamma < \delta < \gamma$$

On a alors

$$\beta^\gamma < \delta \leq \beta^\delta$$

ce qui contredit le fait que pour tout $\delta < \gamma$, $\beta^\delta \leq \beta^\gamma$. Ainsi, $\beta^\gamma \geq \gamma$.

□

Proposition 4.7. *Soient α et β deux ordinaux. On suppose $\alpha \neq 0$ et $\beta \geq 2$. Alors il existe un unique ordinal γ tel que*

$$\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma^+}$$

Démonstration. Considérons la classe

$$C = \{\delta \in \text{ON} : \beta^\delta > \alpha\}$$

Remarquons que $\beta^{\alpha^+} \geq \alpha^+ > \alpha$. Ainsi, $\alpha^+ \in C$ et la classe C n'est pas vide. C possède donc un plus petit élément que nous appellerons δ . Comme $\alpha \neq 0$, on a clairement $\delta \neq 0$.

Supposons que δ est un ordinal limite. Pour tout $\gamma \leq \delta$, on a alors $\beta^\gamma \leq \alpha$. Ainsi, α majore l'ensemble $\{\beta^\gamma : \gamma < \delta\}$. Or, la borne supérieure de cet ensemble est β^δ , et donc $\beta^\delta \leq \alpha$, contradiction.

Ainsi, $\delta = \gamma^+$ est un ordinal successeur. On a alors par minimalité de δ , $\beta^\gamma \leq \alpha$. En conclusion,

$$\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma^+}$$

Montrons maintenant l'unicité. Supposons qu'il existe deux ordinaux γ, γ' tels que

$$\beta^\gamma \leq \alpha < \beta^{\gamma^+}$$

$$\beta^{\gamma'} \leq \alpha < \beta^{\gamma'^+}$$

On a $\beta^\gamma < \beta^{\gamma'^+}$, donc $\gamma < \gamma'^+$ d'où $\gamma \leq \gamma'$. De même, $\gamma' \leq \gamma$. Ainsi, $\gamma = \gamma'$. □

Proposition 4.8. *Soit $\alpha \in \text{ON}$. La fonction $f : \text{ON} \longrightarrow \text{ON}$ définie par $f(\beta) = \alpha^\beta$ est continue sur ON .*

Démonstration. Pour $\alpha = 0$, c'est évident puisque dans ce cas pour tout $\beta \neq 0$, $f(\beta) = 0$. De même si $\alpha = 1$. Nous supposons donc que $\alpha \geq 2$. On se concentre évidemment sur la continuité en les ordinaux limites.

Soit β un ordinal limite. Soit W un voisinage de $f(\beta)$. Il existe $\gamma < f(\beta)$ tel que $\llbracket \gamma, f(\beta) \rrbracket \subseteq W$. Soit δ l'unique ordinal tel que $\alpha^\delta \leq \gamma < \alpha^{\delta^+}$. Supposons un instant que $\alpha^{\delta^+} \geq f(\beta)$. On a alors

$$\alpha^\delta < \alpha^\beta \leq \alpha^{\delta^+}$$

et donc, comme $\alpha \geq 2$,

$$\delta < \beta \leq \delta^+$$

et donc $\beta = \delta^+$. Contradiction, puisque β est un ordinal limite. Posons $V = \llbracket \delta^+, \beta \rrbracket$. Pour tout $\varepsilon \in V$, on a

$$\delta^+ < \varepsilon \leq \beta$$

et donc

$$\gamma < \alpha^{\delta^+} < f(\varepsilon) \leq f(\beta)$$

Ainsi, $f(\varepsilon) \in W$. En conclusion, $f(V) \subseteq W$, donc f est continue en β . $\square$

Si $\alpha \neq 0$, la fonction $\beta \mapsto \alpha^\beta$ est croissante. Si $\alpha = 0$, elle est « presque » constante. On en déduit, comme nous l'avons fait pour la multiplication, le corollaire suivant.

Corollaire 4.9.

Soit E un ensemble non vide d'ordinaux. Soit $\alpha \in \text{Ord}$. On a alors

$$\sup\{\alpha^\beta : \beta \in E\} = \alpha^{\sup(E)}$$

Remarque. Soit $\beta \in \text{ON}$. La fonction $f : \alpha \mapsto \alpha^\beta$ n'est en général pas continue. Prenons par exemple $\beta = \omega$. On a

$$f(\mathbb{N}) = \{n^\omega : n \in \mathbb{N}\} = \{\omega\}$$

et donc $\sup f(\mathbb{N}) = \omega$. En revanche,

$$f(\sup \mathbb{N}) = f(\omega) = \omega^\omega \neq \omega$$

1.4 Propriétés algébriques des puissances

Étant donnés trois ordinaux α, β, γ , il est logique de se demander s'il existe des « formules » donnant la valeur des ordinaux $\alpha^{\beta+\gamma}$, $\alpha^{\beta \times \gamma}$, $(\alpha \times \beta)^\gamma$ et $(\alpha + \beta)^\gamma$.

Il y a peu d'espoir pour les deux dernières quantités, parce que l'addition et la multiplication des ordinaux ne sont pas commutatives. En plus, la multiplication n'est distributive par rapport à l'addition que d'un côté. Par exemple,

$$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \times (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \times \alpha + (\alpha + \beta) \times \beta$$

et on ne peut pas faire mieux. De même,

$$(\alpha \times \beta)^2 = \alpha \times \beta \times \alpha \times \beta$$

mais comme la multiplication n'est pas commutative, il n'y a rien de plus à faire.

En revanche, il est possible d'obtenir des résultats pour $\alpha^{\beta+\gamma}$ et $\alpha^{\beta \times \gamma}$.

Proposition 4.10. *Pour tous ordinaux α, β, γ ,*

$$\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \times \alpha^\gamma$$

Démonstration. Montrons la propriété par induction sur γ .

- $\alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta = \alpha^\beta \times 1 = \alpha^\beta \times \alpha^0$.

- Soit γ un ordinal. Supposons que $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \times \alpha^\gamma$. On a alors

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma^+} &= \alpha^{(\beta+\gamma)^+} \\ &= \alpha^{\beta+\gamma} \times \alpha \\ &= \alpha^\beta \times \alpha^\gamma \times \alpha \\ &= \alpha^\beta \times \alpha^{\gamma^+}\end{aligned}$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$,

$$\alpha^{\beta+\delta} = \alpha^\beta \times \alpha^\delta$$

On a alors

$$\begin{aligned}\alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^{\sup\{\beta+\delta : \delta < \gamma\}} \\ &= \sup\{\alpha^{\beta+\delta} : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha^\beta \times \alpha^\delta : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha^\beta \times \sup\{\alpha^\delta : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha^\beta \times \alpha^\gamma\end{aligned}$$

□

Proposition 4.11. *Pour tous ordinaux α, β, γ ,*

$$(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \times \gamma}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur γ .

- $(\alpha^\beta)^0 = 1 = \alpha^0 = \alpha^{\beta \times 0}$.
- Soit γ un ordinal. Supposons que $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta \times \gamma}$. On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^{\gamma^+} &= (\alpha^\beta)^\gamma \times \alpha^\beta \\ &= \alpha^{\beta \times \gamma} \times \alpha^\beta \\ &= \alpha^{\beta \times \gamma + \beta} \\ &= \alpha^{\beta \times \gamma^+}\end{aligned}$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\delta < \gamma$,

$$(\alpha^\beta)^\delta = \alpha^{\beta \times \delta}$$

On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= \sup\{(\alpha^\beta)^\delta : \delta < \gamma\} \\ &= \sup\{\alpha^{\beta \times \delta} : \delta < \gamma\} \\ &= \alpha^{\sup\{\beta \times \delta : \delta < \gamma\}} \\ &= \alpha^{\beta \times \gamma}\end{aligned}$$

□

2 Les points fixes de la multiplication

Proposition 4.12. *Soient $\alpha, \beta \in \text{ON}$. On a*

$$\beta \times \alpha = \alpha \iff \exists \gamma \in \text{ON}, \alpha = \beta^\omega \times \gamma$$

Démonstration. Tout d'abord, pour tout $\gamma \in \text{ON}$,

$$\beta \times \beta^\omega \times \gamma = \beta^{1+\omega} \times \gamma = \beta^\omega \times \gamma$$

Inversement, supposons que $\beta \times \alpha = \alpha$. Si $\beta = 0$, la conclusion est immédiate. Supposons donc $\beta \neq 0$. Effectuons la division euclidienne de α par β^ω . On a

$$\alpha = \beta^\omega \times \gamma + \delta$$

où $\delta < \beta^\omega$. De là, en remplaçant dans l'égalité $\beta \times \alpha = \alpha$,

$$\beta^{1+\omega} \times \gamma + \beta \times \delta = \beta^\omega \times \gamma + \delta$$

d'où

$$\beta \times \delta = \delta$$

Supposons $\delta \neq 0$. Comme, $\delta < \beta^\omega$, il existe un (unique) entier naturel n tel que

$$\beta^n \leq \delta < \beta^{n+1}$$

De là, en multipliant à gauche par β ,

$$\beta^{n+1} \leq \beta \times \delta = \delta < \beta^{n+2}$$

Contradiction. Ainsi, $\delta = 0$ et donc $\alpha = \beta^\omega \times \gamma$. □

3 La forme normale de Cantor

Dans toute cette section, π désigne un ordinal vérifiant $\pi \geq 2$.

Nous allons voir que tout ordinal se décompose de façon unique en « base π », exactement comme tout entier naturel se décompose de façon unique en base p , lorsque p est un entier supérieur ou égal à 2.

Nous allons commencer par établir quelques résultats préliminaires.

3.1 Préliminaires

La proposition ci-dessous s'appelle le théorème du logarithme.

Lemme 4.13. [THÉORÈME DU LOGARITHME]

Soit α un ordinal non nul. Il existe un unique triplet (μ, γ, β) d'ordinaux tel que

$$\alpha = \pi^\mu \times \gamma + \beta$$

où $\beta < \pi^\mu$ et $0 < \gamma < \pi$.

Le nom « théorème du logarithme » vient du fait que lorsque α et π sont entiers, on a $\mu = \lfloor \log_\pi \alpha \rfloor$.

Démonstration. Nous avons vu qu'il existe un unique ordinal μ tel que

$$\pi^\mu \leq \alpha < \pi^{\mu+}$$

Effectuons la division euclidienne de α par π^μ . Il existe γ, β tels que

$$\alpha = \pi^\mu \times \gamma + \beta$$

avec $\beta < \pi^\mu$. On a donc

$$\alpha = \pi^\mu \times \gamma + \beta < \pi^{\mu+} = \pi^\mu \times \pi$$

et a fortiori

$$\pi^\mu \times \gamma < \pi^\mu \times \pi$$

d'où $\gamma < \pi$. De plus,

$$\pi^\mu \leq \pi^\mu \times \gamma + \beta < \pi^\mu \times \gamma + \pi^\mu = \pi^\mu \times \gamma^+$$

et donc $\gamma^+ > 1$, d'où $\gamma \geq 1$.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons

$$\alpha = \pi^\mu \times \gamma + \beta$$

où $\beta < \pi^\mu$ et $0 < \gamma < \mu$. Remarquons que

$$\pi^\mu \leq \pi^\mu \times \gamma + \beta = \alpha$$

De plus,

$$\alpha = \pi^\mu \times \gamma + \beta < \pi^\mu \times \gamma + \pi^\mu = \pi^\mu \times (\gamma + 1) \leq \pi^\mu \times \pi = \pi^{\mu+}$$

Ainsi,

$$\pi^\mu \leq \alpha < \pi^{\mu+}$$

Nous avons déjà vu qu'un tel μ était unique. On en déduit l'unicité de γ et β , qui sont le quotient et le reste de la division euclidienne de α par π^μ . $\square$

Remarque. Par le lemme 6, on a $\mu \leq \pi^\mu$. Comme $\pi^\mu \leq \alpha$, on a donc $\mu \leq \alpha$.

Majorons maintenant des sommes compliquées.

Lemme 4.14. *Pour tout entier $r \geq 1$, pour tous ordinaux $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r$, pour tous ordinaux $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in \llbracket 0, \pi \rrbracket$,*

$$\sum_{k=1}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k < \pi^{\mu_1^+}$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur r .

- $\pi^{\mu_1} \times \gamma_1 < \pi^{\mu_1} \times \pi = \pi^{\mu_1^+}$.
- Soit $r \geq 2$. Supposons la propriété vérifiée pour $r - 1$. Comme $\mu_2 < \mu_1$, on a $S(\mu_2) \leq \mu_1$. De même, $\gamma_1 + 1 \leq \pi$. De là,

$$\begin{aligned} \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + \dots + \pi^{\mu_r} \times \gamma_r &= \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + (\pi^{\mu_2} \times \gamma_2 + \dots + \pi^{\mu_r} \times \gamma_r) \\ &< \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + \pi^{\mu_2^+} \\ &\leq \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + \pi^{\mu_1} \\ &= \pi^{\mu_1} \times (\gamma_1 + 1) \\ &\leq \pi^{\mu_1} \times \pi \\ &= \pi^{\mu_1^+} \end{aligned}$$

□

3.2 Existence de la forme normale de Cantor

Proposition 4.15. [FORME NORMALE DE CANTOR - EXISTENCE]

Soit α un ordinal non nul. Il existe

- *Un entier naturel $r \geq 1$*
- *Un r -uplet d'ordinaux $(\mu_1, \dots, \mu_r)$ tel que $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_r$*
- *Un r -uplet d'ordinaux $(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $0 < \gamma_i < \pi$*

tels que

$$\alpha = \sum_{k=1}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k$$

Démonstration. Montrons l'existence par induction sur α . Soit α un ordinal non nul. Supposons l'existence assurée pour tout ordinal β non nul tel que $\beta < \alpha$. Par la proposition précédente, il existe trois ordinaux μ_1 , γ_1 et β tels que $\alpha = \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + \beta$, avec de plus $0 < \gamma_1 < \pi$ et $\beta < \pi^{\mu_1}$.

Si $\beta = 0$, alors $\alpha = \pi^{\mu_1} \times \gamma_1$ et on a terminé. Sinon, en remarquant que $\pi^{\mu_1} \leq \alpha$, on a donc $1 \leq \beta < \alpha$. Par l'hypothèse d'induction, il existe un entier $r \geq 2$, des ordinaux $\mu_2 > \dots > \mu_r$ et des ordinaux $\gamma_2, \dots, \gamma_r$ appartenant à $\llbracket 0, \pi \rrbracket$ tels que

$$\beta = \sum_{k=2}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k$$

De là,

$$\alpha = \sum_{k=1}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k$$

Il reste à montrer que $\mu_1 > \mu_2$. Pour cela, il suffit de remarquer que

$$\pi^{\mu_2} \leq \beta < \pi^{\mu_1}$$

□

3.3 Unicité de la forme normale de Cantor

Proposition 4.16. [FORME NORMALE DE CANTOR - UNICITÉ]

L'entier r et les ordinaux μ_i, γ_i dont l'existence est affirmée par la proposition 15 sont définis de façon unique.

Démonstration. Soit α un ordinal non nul. Supposons

$$(1) \alpha = \sum_{k=1}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k = \sum_{k=1}^{r'} \pi^{\mu'_k} \times \gamma'_k$$

avec les conditions usuelles sur les μ_i, μ'_i, γ_i et γ'_i . Écrivons

$$\alpha = \pi^{\mu_1} \times \gamma_1 + \beta$$

où

$$\beta = \sum_{k=2}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k$$

On a

$$\beta < \pi^{\mu_2^+} \leq \pi^{\mu_1}$$

Par le lemme ci-dessus, on a l'unicité de μ_1 et γ_1 . Ainsi, $\mu_1 = \mu'_1$ et $\gamma_1 = \gamma'_1$. En simplifiant dans (1), on obtient

$$\sum_{k=2}^r \pi^{\mu_k} \times \gamma_k = \sum_{k=2}^{r'} \pi^{\mu'_k} \times \gamma'_k$$

Une récurrence sur $\min(r, r')$ permet clairement de montrer que $r = r'$ et pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\mu_i = \mu'_i$ et $\gamma_i = \gamma'_i$. □

4 Application à l'arithmétique des ordinaux

Pour simplifier la présentation, nous supposons dans cette section que $\pi = \omega$. Nous allons voir comment, à partir de la forme normale de Cantor de deux ordinaux α et β , il est possible de calculer la forme normale de $\alpha + \beta$ et $\alpha \times \beta$.

4.1 Addition

Proposition 4.17. *Soient μ , ν , γ et δ des ordinaux. On suppose $\mu < \nu$ et $0 < \gamma, \delta < \omega$. On a alors*

$$\omega^\mu \times \gamma + \omega^\nu \times \delta = \omega^\nu \times \delta$$

Démonstration. Écrivons $\nu = \mu + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned} \omega^\mu \times \gamma + \omega^\nu \times \delta &= \omega^\mu \times \gamma + \omega^{\mu+\varepsilon} \times \delta \\ &= \omega^\mu \times (\gamma + \omega^\varepsilon \times \delta) \\ &= \omega^\mu \times \omega^\varepsilon \times \delta \\ &= \omega^\nu \times \delta \end{aligned}$$

□

Écrivons

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k \\ \beta &= \sum_{k=1}^s \omega^{\nu_k} \times \delta_k \end{aligned}$$

où $\mu_1 > \dots > \mu_r$, $\nu_1 > \dots > \nu_s$ et les γ_i et les δ_i sont des entiers naturels non nuls. La proposition précédente permet d'obtenir facilement la forme normale de $\alpha + \beta$.

Soit $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$ l'unique entier vérifiant $\mu_i \geq \nu_1 > \mu_{i+1}$. On a alors

$$\alpha + \beta = \sum_{k=1}^i \omega^{\mu_k} \times \gamma_k + \sum_{k=1}^s \omega^{\nu_k} \times \delta_k$$

Dans le cas où $\mu_i = \nu_1$, une petite simplification est encore nécessaire, en écrivant

$$\omega^{\mu_i} \times \gamma_i + \omega^{\nu_1} \times \delta_1 = \omega^{\nu_1} \times (\gamma_i + \delta_1)$$

4.2 Multiplication

Proposition 4.18. *Soit $r \geq 1$. Soient $\mu_1, \dots, \mu_r, \nu_1$ $r+1$ ordinaux tels que $\mu_1 > \dots > \mu_r$ et $\nu_1 \neq 0$. Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ r entiers naturels non nuls. On a*

$$\left(\sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k \right) \times \omega^{\nu_1} = \omega^{\mu_1 + \nu_1}$$

Démonstration. Tout d'abord,

$$\left(\sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k \right) \times \omega^{\nu_1} \geq \omega^{\mu_1} \times \gamma_1 \times \omega^{\nu_1} = \omega^{\mu_1 + \nu_1}$$

Montrons maintenant qu'on a aussi l'inégalité inverse. Par le lemme 14,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k &< \omega^{\mu_1} \times \gamma_1 + \omega^{\mu_2+1} \\ &\leq \omega^{\mu_1} \times \gamma_1 + \omega^{\mu_1} \\ &= \omega^{\mu_1} \times (\gamma_1 + 1) \end{aligned}$$

De là,

$$\left(\sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k \right) \times \omega^{\nu_1} \leq \omega^{\mu_1} \times (\gamma_1 + 1) \times \omega^{\nu_1} = \omega^{\mu_1 + \nu_1}$$

□

Il est maintenant facile de calculer la forme normale d'un produit. Reprenons les notations du paragraphe sur l'addition. Soient

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times \gamma_k \\ \beta &= \sum_{k=1}^s \omega^{\nu_k} \times \delta_k \end{aligned}$$

écrits sous forme normale. Si $\nu_1 \neq 0$, on a alors

$$\begin{aligned} \alpha \times \beta &= \sum_{j=1}^r \omega^{\mu_j} \times \gamma_j \times \sum_{k=1}^s \omega^{\nu_k} \times \delta_k \\ &= \sum_{k=1}^s \left(\sum_{j=1}^r \omega^{\mu_j} \times \gamma_j \right) \times \omega^{\nu_k} \times \delta_k \\ &= \sum_{k=1}^s \omega^{\mu_1 + \nu_k} \times \delta_k \end{aligned}$$

Si, au contraire, $\nu_1 = 0$, cela signifie que $\beta = \delta_1 \in \mathbb{N}^*$. On a alors évidemment

$$\alpha \times \beta = \sum_{k=1}^r \omega^{\mu_k} \times (\gamma_k \delta_1)$$

5 Les points fixes de l'exponentielle

Dans toute cette section, α est un ordinal supérieur ou égal à 2. Tout comme nous avons résolu les équations $\alpha + \beta = \beta$ et $\alpha \times \beta = \beta$, nous allons nous intéresser ici à l'équation $\alpha^\beta = \beta$.

5.1 Superpuissances

Définition 4.2. Soit $\delta \in \text{ON}$. On définit par récurrence sur n l'ordinal $\alpha^{\uparrow n, \delta}$ en posant

- $\alpha^{\uparrow 0, \delta} = \delta$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha^{\uparrow n+1, \delta} = \alpha^{\alpha^{\uparrow n, \delta}}$.

On pose également

$$\alpha^{\uparrow \omega, \delta} = \varepsilon_\delta = \sup\{\alpha^{\uparrow n, \delta} : n \in \mathbb{N}\}$$

Proposition 4.19. Soit $\delta \in \text{ON}$. La suite $(\alpha^{\uparrow n, \delta})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Démonstration. Rappelons que comme $\alpha \geq 2$, on a pour tout ordinal β , $\alpha^\beta \geq \beta$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\alpha^{\uparrow n+1, \delta} = \alpha^{\alpha^{\uparrow n, \delta}} \geq \alpha^{\uparrow n, \delta}$$

□

Proposition 4.20. $\alpha^{\varepsilon_\delta} = \varepsilon_\delta$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} \alpha^{\varepsilon_\delta} &= \alpha^{\sup\{\alpha^{\uparrow n, \delta} : n < \omega\}} \\ &= \sup\{\alpha^{\alpha^{\uparrow n, \delta}} : n < \omega\} \\ &= \sup\{\alpha^{\uparrow n+1, \delta} : n < \omega\} \\ &= \sup\{\alpha^{\uparrow n, \delta} : 1 \leq n < \omega\} \\ &= \varepsilon_\delta \end{aligned}$$

Remarquons que nous avons utilisé, dans la deuxième égalité, la continuité de la fonction $\beta \mapsto \alpha^\beta$. □

Proposition 4.21. $\varepsilon_\delta \geq \delta$.

Démonstration. Car $\varepsilon_\delta \geq \alpha^{\uparrow 0, \delta} = \delta$. □

Proposition 4.22. Soit $\delta \in \text{ON}$. L'ordinal ε_δ est le plus petit ordinal $\varepsilon \geq \delta$ tel que $\alpha^\varepsilon = \varepsilon$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que $\varepsilon_\delta \geq \delta$ et $\alpha^{\varepsilon_\delta} = \varepsilon_\delta$. Soit $\varepsilon \in \text{ON}$. Supposons que $\varepsilon \geq \delta$ et $\alpha^\varepsilon = \varepsilon$.

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \geq \alpha^{\uparrow n, \delta}$.

- $\varepsilon \geq \delta = \alpha^{\uparrow 0, \delta}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\varepsilon \geq \alpha^{\uparrow n, \delta}$. On a alors

$$\varepsilon = \alpha^\varepsilon \geq \alpha^{\alpha^{\uparrow n, \delta}} = \alpha^{\uparrow n+1, \delta}$$

Ainsi, ε est un majorant de l'ensemble $\{\alpha^{\uparrow n, \delta} : n < \omega\}$. Par minimalité de ε_δ , on a donc $\varepsilon \geq \varepsilon_\delta$.

□

Notons $C = \{\varepsilon \in \text{ON} : \alpha^\varepsilon = \varepsilon\}$.

Proposition 4.23. *La classe C est une classe propre.*

Démonstration. Il suffit de prouver que C n'est pas majorée. Soit $\delta \in \text{ON}$. Soit $\beta = \varepsilon_{\delta+}$. On a $\beta \in C$ et $\beta \geq \delta^+ > \delta$. Ainsi, δ ne majore pas C . □

5.2 Une description de C

Soit $\varepsilon \in C$. La sous-classe de C des ordinaux de C strictement supérieurs à ε est non vide, puisque C n'est pas majorée. Le plus petit élément de C strictement supérieur à ε est aussi le plus petit élément de C supérieur ou égal à ε^+ . C'est donc $\varepsilon_{\varepsilon+}$. Ceci suggère de définir par récursion sur l'ordinal β la fonction $\Phi : \text{ON} \rightarrow \text{ON}$ définie par

- $\Phi(0) = \varepsilon_0$.
- Pour tout ordinal β ,

$$\Phi(\beta^+) = \varepsilon_{(\Phi(\beta))^+}$$

- Pour tout ordinal limite β ,

$$\Phi(\beta) = \sup\{\Phi(\gamma) : \gamma < \beta\}$$

Les premières valeurs de la fonction Φ sont donc

- $\Phi(0) = \varepsilon_0$.
- $\Phi(1) = \varepsilon_{\varepsilon_0+1}$.
- $\Phi(2) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0+1}+1}$.
- $\Phi(3) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0+1}+1}+1}$.
- $\Phi(4) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0+1}+1}+1}+1}$.
- $\Phi(5) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_0+1}+1}+1}+1}+1}$.

Proposition 4.24. *La fonction Φ est strictement croissante.*

Démonstration. Soit $\beta \in \text{ON}$. Montrons par induction sur γ que pour tout $\gamma \in \text{ON}$, $\beta < \gamma \implies \Phi(\beta) < \Phi(\gamma)$.

- C'est clair si $\gamma = 0$, puisque $\beta < 0$ est faux.
- Soit $\gamma \in \text{ON}$. Supposons que $\beta < \gamma \implies \Phi(\beta) < \Phi(\gamma)$. Supposons $\beta < \gamma^+$, c'est à dire $\beta \leq \gamma$. Si $\beta < \gamma$, alors on conclut avec l'hypothèse d'induction. Si $\beta = \gamma$, alors

$$\Phi(\gamma^+) = \varepsilon_{(\Phi(\gamma))^+} = \varepsilon_{(\Phi(\beta))^+} \geq (\Phi(\beta))^+ > \Phi(\beta)$$

- Soit γ un ordinal limite. Supposons que pour tout $\delta < \gamma$, $\beta < \delta \implies \Phi(\beta) < \Phi(\delta)$. Supposons $\beta < \gamma$. Comme γ est un ordinal limite, $\beta < \delta = \beta^+ < \gamma$. Par l'hypothèse d'induction, $\Phi(\beta) < \Phi(\delta)$. Par la définition de $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\delta) \leq \Phi(\gamma)$. Ainsi, $\Phi(\beta) < \Phi(\gamma)$.

□

Notons $D = \Phi(\text{ON}) = \{\Phi(\beta) : \beta \in \text{ON}\}$.

Proposition 4.25. $C = D$.

Démonstration. Montrons par induction sur β que pour tout $\beta \in \text{ON}$, $\Phi(\beta) \in C$. C'est évident si $\beta = 0$ ou si β est un ordinal successeur. Supposons que β est un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\gamma < \beta$, $\Phi(\gamma) \in C$. On a

$$\begin{aligned} \alpha^{\Phi(\beta)} &= \alpha^{\sup\{\Phi(\gamma) : \gamma < \beta\}} \\ &= \sup\{\alpha^{\Phi(\gamma)} : \gamma < \beta\} \\ &= \sup\{\Phi(\gamma) : \gamma < \beta\} \\ &= \Phi(\beta) \end{aligned}$$

Ainsi, $\Phi(\beta) \in C$.

Montrons maintenant que $C \subseteq D$. Soit $\gamma \in C$. Comme Φ est strictement croissante, on a $\Phi(\gamma^+) \geq \gamma^+ > \gamma$. Il existe donc un ordinal δ tel que $\Phi(\delta) > \gamma$. Prenons un tel δ minimal. Clairement, $\delta \neq 0$. Supposons un instant que δ est un ordinal limite. Par la minimalité de δ , on a pour tout $\delta' < \delta$, $\Phi(\delta') \leq \gamma$. Mais alors, γ majore $\{\Phi(\delta') : \delta' < \delta\}$. On en déduit (δ étant un ordinal limite) que $\Phi(\delta) \leq \gamma$.

Ainsi, $\delta = \zeta^+$ est un ordinal successeur. Par la minimalité de δ , on a donc

$$\Phi(\zeta) \leq \gamma < \Phi(\zeta^+) = \varepsilon_{(\Phi(\zeta))^+}$$

Remarquons maintenant que $\varepsilon = \varepsilon_{(\Phi(\zeta))^+}$ est le plus petit ordinal strictement supérieur à $\Phi(\zeta)$ appartenant à C . Comme $\gamma \in C$ et $\gamma < \varepsilon$, on a donc $\gamma \leq \Phi(\zeta)$. Ainsi, $\gamma = \Phi(\zeta) \in D$.

□

Proposition 4.26. Φ est une bijection de ON sur C .

Démonstration. Φ est strictement croissante, donc injective. C'est donc une bijection de ON sur $\Phi(\text{ON}) = C$. □

Chapitre 5

Ordinaux limites

Dans tout ce chapitre nous noterons LIM la classe des ordinaux limites. Nous noterons $LIM' = LIM \cup \{0\}$. La classe LIM' est ainsi la classe des ordinaux non successeurs.

1 Une énumération de LIM'

1.1 Une suite d'ordinaux

Proposition 5.1. *LIM et LIM' sont des classes propres.*

Démonstration. Il suffit évidemment de faire la preuve pour LIM . Soit α un ordinal. On a $\alpha + \omega > \alpha$, et $\alpha + \omega$ est un ordinal limite. Ainsi, la classe LIM n'est pas majorée. C'est donc une classe propre. $\square$

Définition 5.1. On définit par récursion sur α les ordinaux λ_α en posant

- $\lambda_0 = 0$.
- Pour tout ordinal α , $\lambda_{\alpha+}$ est le plus petit élément de LIM' strictement supérieur à λ_α .
- Pour tout ordinal limite α ,

$$\lambda_\alpha = \sup\{\lambda_\beta : \beta < \alpha\}$$

Notation. $C = \{\lambda_\alpha : \alpha \in ON\}$.

Lemme 5.2. $C \subseteq LIM'$.

Démonstration. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\lambda_\alpha \in LIM'$.

- C'est clair pour $\lambda_0 = 0$.
- Soit $\alpha \in ON$. Supposons que λ_α est un ordinal limite. Alors, sans utiliser l'hypothèse, $\lambda_{S(\alpha)}$ est, par définition même, un élément de LIM' .
- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $\lambda_\beta \in LIM'$. Notons

$$E = \{\lambda_\beta : \beta < \alpha\}$$

de sorte que $\lambda_\alpha = \sup E$. Supposons que $\lambda_\alpha \notin LIM$. Il existe donc un ordinal γ tel que $\lambda_\alpha = \gamma^+$. On a $\gamma < \lambda_\alpha$, donc γ ne majore pas E . Ainsi, il existe $\beta < \alpha$ tel que

$$\gamma < \lambda_\beta \leq \lambda_\alpha = \gamma^+$$

et donc

$$\gamma^+ \leq \lambda_\beta \leq \gamma^+$$

d'où $\lambda_\beta = \gamma^+$, ce qui contredit le fait que λ_β appartient à LIM' .

$\square$

1.2 Propriétés de λ

Proposition 5.3. *La fonction $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ est strictement croissante.*

Démonstration. Soient $\alpha \in ON$. Montrons par induction sur l'ordinal β que pour tout $\beta \in ON$, $\alpha < \beta \implies \lambda_\alpha < \lambda_\beta$.

- C'est clair pour $\beta = 0$, puisque $\alpha < 0$ est faux.
- Soit $\beta \in ON$. Supposons que $\alpha < \beta \implies \lambda_\alpha < \lambda_\beta$. Supposons que $\alpha < \beta^+$, c'est à dire $\alpha \leq \beta$. Si $\alpha < \beta$, alors par l'hypothèse d'induction, $\lambda_\alpha < \lambda_\beta$. Si $\alpha = \beta$ alors, comme λ_{β^+} est le plus petit ordinal limite strictement supérieur à λ_β , on a $\lambda_\alpha = \lambda_\beta < \lambda_{\beta^+}$.
- Soit β un ordinal limite. Supposons que pour tout $\gamma < \beta$, $\alpha < \gamma \implies \lambda_\alpha < \lambda_\gamma$. Supposons que $\alpha < \beta$. Considérons l'ensemble

$$E = \{\lambda_\gamma : \gamma < \beta\} = \{\lambda_\gamma : \gamma \leq \alpha\} \cup \{\lambda_\gamma : \alpha < \gamma < \beta\}$$

Comme β est un ordinal limite et $\alpha < \beta$, le second ensemble du membre de droite est non vide. Soit γ un élément de cet ensemble. Par l'hypothèse d'induction, on a $\lambda_\alpha < \lambda_\gamma \in E$. Comme $\lambda_\beta = \sup E$, on a

$$\lambda_\alpha < \lambda_\gamma \leq \lambda_\beta$$

□

Proposition 5.4. *Pour tout ordinal α , $\lambda_\alpha \geq \alpha$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un ordinal α tel que $\lambda_\alpha < \alpha$. Prenons un tel α minimal. Posons $\mu = \lambda_\alpha$. Comme $\mu < \alpha$, on a par la croissance stricte de λ ,

$$\lambda_\mu < \lambda_\alpha = \mu$$

ce qui contredit la minimalité de α . □

Lemme 5.5. *C est une classe propre.*

Démonstration. En effet, pour tout ordinal α ,

$$\alpha < \alpha^+ \leq \lambda_{\alpha^+}$$

Ainsi, α ne majore pas C . La classe C n'est pas majorée, c'est donc une classe propre. □

Lemme 5.6. $LIM' \subseteq C$.

Démonstration. Supposons que ce ne soit pas le cas. Appelons λ le plus petit élément de LIM' qui n'est pas dans C . L'ordinal λ ne majore pas la classe propre C . Il existe donc $\alpha \in ON$ tel que $\lambda < \lambda_\alpha$. Prenons un tel α minimal. Il y a trois cas à considérer.

- $\alpha = 0$. On a donc $\lambda < \lambda_0 = 0$. C'est clairement impossible.
- $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur. Par la minimalité de α , on a $\lambda_\beta \leq \lambda$. Comme λ n'est pas dans C , on a même $\lambda_\beta < \lambda$. Ainsi,

$$\lambda_\beta < \lambda < \lambda_{\beta+}$$

Mais ceci contredit le fait que $\lambda_{\beta+}$ est le plus petit ordinal limite strictement supérieur à λ_β .

- α est un ordinal limite. Par la minimalité de α , pour tout $\beta < \alpha$, $\lambda_\beta \leq \lambda$. On a même une inégalité stricte car on a supposé $\lambda \notin C$. Ainsi, λ majore l'ensemble $\{\lambda_\beta : \beta < \alpha\}$. La borne supérieure de cet ensemble est λ_α , on a donc $\lambda_\alpha \leq \lambda$, contradiction.

□

1.3 Conclusion

Remarquons que pour tout ordinal $\alpha \neq 0$, $\lambda_\alpha > \lambda_0 = 0$. Ainsi, λ_α est un ordinal non successeur et non nul, c'est à dire un ordinal limite. Pour résumer ce qui précède,

Proposition 5.7.

$$\begin{aligned} \{\lambda_\alpha : \alpha \in ON\} &= LIM' \\ \{\lambda_\alpha : \alpha \in ON, \alpha \neq 0\} &= LIM \end{aligned}$$

2 Une description des ordinaux limites

2.1 Ordinaux limites et multiples de ω

Proposition 5.8. *Soit $\alpha \in ON$. L'ordinal α est un ordinal limite si et seulement si il existe un ordinal $\beta \neq 0$ tel que $\alpha = \omega \times \beta$.*

Démonstration. Effectuons la division euclidienne de α par ω . Il existe $\beta \in ON$ non nul et $n \in \mathbb{N}$ uniques tels que $\alpha = \omega \times \beta + n$.

Si $n \neq 0$, alors

$$\alpha = (\omega \times \beta + (n-1))^+$$

et donc α est un ordinal successeur. Ainsi, si α est un ordinal limite, il existe $\beta \in ON$ tel que $\alpha = \omega \times \beta$.

Inversement, supposons que $\alpha = \delta^+$ est un ordinal successeur. Effectuons la division euclidienne de δ par ω pour obtenir un ordinal β et un entier naturel n tels que

$$\delta = \omega \times \beta + n$$

et donc

$$\alpha = \omega \times \beta + (n+1)$$

Par l'unicité du quotient et du reste de la division euclidienne, α n'est pas de la forme $\omega \times \beta$, avec $\beta \in \text{ON}$. $\square$

Proposition 5.9. *Pour tout $\alpha \in \text{ON}$, $\lambda_\alpha = \omega \times \alpha$.*

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur α .

- On a $\lambda_0 = 0 = \omega \times 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que $\lambda_\alpha = \omega \times \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega \times \alpha + n$ n'est pas un ordinal limite. En revanche, $\omega \times \alpha + \omega = \omega \times (\alpha + 1)$ en est un. Ainsi, le plus petit ordinal limite strictement supérieur à $\omega \times \alpha$ est $\omega \times (\alpha + 1)$. On en déduit que

$$\lambda_{\alpha+1} = \omega \times (\alpha + 1)$$

- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $\lambda_\beta = \omega \times \beta$. On a alors

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha &= \sup\{\lambda_\beta : \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{\omega \times \beta : \beta < \alpha\} \\ &= \omega \times \sup\{\beta : \beta < \alpha\} \\ &= \omega \times \alpha \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Les points fixes de λ

Nous avons vu que pour tout ordinal α , $\lambda_\alpha \geq \alpha$. Existe-t-il des ordinaux α pour lesquels on a égalité ?

Proposition 5.10. *Soit $\alpha \in \text{ON}$. On a $\lambda_\alpha = \alpha$ si et seulement si il existe $\gamma \in \text{ON}$ tel que $\alpha = \omega^\omega \times \gamma$.*

Démonstration. Il suffit de reprendre ce que nous avons déjà vu pour les points fixes de la multiplication. $\square$

Chapitre 6

Dénombrabilité

1 Introduction

1.1 Notion d'ordinal dénombrable

Rappelons qu'un ensemble E est *dénombrable* lorsqu'il existe une bijection de E sur $\mathbb{N}$. On étend facilement la notion de dénombrabilité aux ordinaux. Voici la définition.

Définition 6.1. L'ordinal α est *dénombrable* lorsque l'intervalle $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$ est un ensemble dénombrable.

Notation. Pour abréger, nous écrirons f.o.d pour « fini ou dénombrable ».

Commençons par deux évidences.

Proposition 6.1. Soit $\alpha \in ON$. α est f.o.d si et seulement si α^+ est f.o.d.

Démonstration. Ajouter ou retrancher un élément à un ensemble f.o.d redonne un ensemble f.o.d. $\square$

Proposition 6.2. Soit α un ordinal f.o.d. Alors, pour tout $\beta < \alpha$, β est f.o.d.

Démonstration. En effet, $\llbracket 0, \beta \rrbracket \subseteq \llbracket 0, \alpha \rrbracket$ et tout sous-ensemble d'un ensemble f.o.d est encore f.o.d. $\square$

1.2 Quelques exemples

Proposition 6.3. ω est dénombrable.

Démonstration. C'est une évidence : $\llbracket 0, \omega \rrbracket = \mathbb{N}$. $\square$

Histoire de nous échauffer, prenons encore deux exemples. Nous en aurons bientôt beaucoup d'autres.

Proposition 6.4. $\omega + 1$ est dénombrable.

Démonstration. On a

$$\llbracket 0, \omega + 1 \rrbracket = \llbracket 0, \omega \rrbracket = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$$

L'application $f : \mathbb{N} \longrightarrow \llbracket 0, \omega + 1 \rrbracket$ définie par $f(0) = \omega$ et $f(n) = n - 1$ si $n \geq 1$ est une bijection. $\square$

Proposition 6.5. $\omega + \omega$ est dénombrable.

Démonstration. On a

$$\llbracket 0, \omega + \omega \rrbracket = \llbracket 0, \omega \rrbracket \cup \llbracket \omega, \omega + \omega \rrbracket = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$$

L'application $f : \mathbb{N} \rightarrow \llbracket 0, \omega + \omega \rrbracket$ définie pour tout entier naturel p par $f(2p) = p$ et $f(2p + 1) = \omega + p$ est une bijection. Sa réciproque est la fonction $g : \llbracket 0, \omega + \omega \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}$ définie comme suit. Pour tout $\alpha \in \llbracket 0, \omega + \omega \rrbracket$,

- Si $\alpha < \omega$, $g(\alpha) = 2\alpha$.
- Si $\alpha \geq \omega$, alors il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = \omega + p$, et on pose $g(\alpha) = 2p + 1$.

□

Nous allons maintenant passer en revue les opérations sur les ordinaux et voir que ces opérations conservent la propriété « être f.o.d ».

2 Opérations sur les ordinaux f.o.d

2.1 Addition

Proposition 6.6. *Soient α et β deux ordinaux f.o.d. Alors, $\alpha + \beta$ est f.o.d.*

Démonstration. Soit α un ordinal f.o.d. Montrons par induction sur β que

$$\beta \text{ f.o.d} \implies \alpha + \beta \text{ f.o.d}$$

- $\alpha + 0 = \alpha$, la conclusion est donc dans ce cas immédiate.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que $\beta \text{ f.o.d} \implies \alpha + \beta \text{ f.o.d}$. Supposons $\beta^+ \text{ f.o.d}$. Alors, β est aussi f.o.d. et donc $\alpha + \beta$ est f.o.d par l'hypothèse d'induction. De là, $\alpha + \beta^+ = (\alpha + \beta)^+$ est f.o.d.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que pour tout ordinal $\gamma < \beta$, $\gamma \text{ f.o.d} \implies \alpha + \gamma \text{ f.o.d}$. Remarquons que

$$\llbracket 0, \alpha + \beta \rrbracket = \bigcup_{\gamma < \beta} \llbracket 0, \alpha + \gamma \rrbracket$$

Pour tout $\gamma < \beta$, γ est f.o.d. donc, par l'hypothèse d'induction, $\llbracket 0, \alpha + \gamma \rrbracket$ est f.o.d. De là, $\llbracket 0, \alpha + \beta \rrbracket$, réunion dénombrable d'ensembles f.o.d, est encore f.o.d.

□

2.2 Multiplication

Proposition 6.7. *Soient α et β deux ordinaux f.o.d. Alors, $\alpha \times \beta$ est f.o.d.*

Démonstration. Soit α un ordinal f.o.d. Montrons par induction sur β que pour tout ordinal β ,

$$\beta \text{ f.o.d} \implies \alpha \times \beta \text{ f.o.d}$$

- $\alpha \times 0 = 0$, la conclusion est donc dans ce cas immédiate.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que $\beta \text{ f.o.d.} \implies \alpha \times \beta \text{ f.o.d.}$. Supposons $\beta^+ \text{ f.o.d.}$. Alors, β est aussi f.o.d. et donc $\alpha \times \beta$ est f.o.d. par l'hypothèse d'induction. De là, $\alpha \times \beta^+ = \alpha \times \beta + \alpha$ est f.o.d. en tant que somme de deux ordinaux f.o.d.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que pour tout ordinal $\gamma < \beta$, $\gamma \text{ f.o.d.} \implies \alpha \times \gamma \text{ f.o.d.}$. Remarquons que

$$\llbracket 0, \alpha \times \beta \rrbracket = \bigcup_{\gamma < \beta} \llbracket 0, \alpha \times \gamma \rrbracket$$

Pour tout $\gamma < \beta$, γ est f.o.d. donc, par l'hypothèse d'induction, $\llbracket 0, \alpha \times \gamma \rrbracket$ est f.o.d. De là, $\llbracket 0, \alpha \times \beta \rrbracket$, réunion dénombrable d'ensembles f.o.d., est encore f.o.d.

□

2.3 Exponentiation

Proposition 6.8. *Soient α et β deux ordinaux f.o.d. Alors, α^β est f.o.d.*

Démonstration. Soit α un ordinal f.o.d. Montrons par induction sur β que pour tout ordinal β ,

$$\beta \text{ f.o.d.} \implies \alpha^\beta \text{ f.o.d.}$$

- $\alpha^0 = 1$, la conclusion est donc dans ce cas immédiate.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que $\beta \text{ f.o.d.} \implies \alpha^\beta \text{ f.o.d.}$. Supposons $\beta^+ \text{ f.o.d.}$. Alors, β est aussi f.o.d. et donc α^β est f.o.d. par l'hypothèse d'induction. De là, $\alpha^{\beta^+} = \alpha^\beta \times \alpha$ est f.o.d. en tant que produit de deux ordinaux f.o.d.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que pour tout ordinal $\gamma < \beta$, $\gamma \text{ f.o.d.} \implies \alpha^\gamma \text{ f.o.d.}$. Remarquons que

$$\llbracket 0, \alpha^\beta \rrbracket = \bigcup_{\gamma < \beta} \llbracket 0, \alpha^\gamma \rrbracket$$

Pour tout $\gamma < \beta$, γ est f.o.d. donc, par l'hypothèse d'induction, $\llbracket 0, \alpha^\gamma \rrbracket$ est f.o.d. De là, $\llbracket 0, \alpha^\beta \rrbracket$, réunion dénombrable d'ensembles f.o.d., est encore f.o.d.

□

3 L'ordinal ε_0

Nous avons dans le chapitre précédent défini pour tous ordinaux α et δ l'ordinal $\alpha^{\uparrow\omega, \delta}$. Regardons ici un cas particulier, celui où $\alpha = \omega$ et $\delta = 0$.

En reprenant les notations vues au chapitre précédent, $\omega^{\uparrow 0, 0} = 0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega^{\uparrow n+1, 0} = \omega^{\omega^{\uparrow n, 0}}$. On a alors

$$\omega^{\uparrow\omega, 0} = \sup\{\omega^{\uparrow n, 0} : n \in \mathbb{N}\}$$

Nous noterons $\varepsilon_0 = \omega^{\uparrow\omega,0}$. Nous voilà en possession d'un ordinal ε_0 qui vérifie

$$\varepsilon_0 = \sup\{0, 1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \omega^{\omega^{\omega^\omega}}, \dots\}$$

Nous avons montré au chapitre précédent que ε_0 est le plus petit ordinal ε tel que $\omega^\varepsilon = \varepsilon$.

Intuitivement,

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}}$$

avec « ω points de suspension ». Très certainement, ε_0 doit être énorme ! En fait, non.

Proposition 6.9. *ε_0 est dénombrable.*

Démonstration. $\varepsilon_0 \geq \omega^{\uparrow 2,0} = \omega$, donc ε_0 n'est pas fini.

Rappelons nous que la suite $(\omega^{\uparrow n,0})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Elle est même strictement croissante, parce que ε_0 est le plus petit ordinal ε tel que $\omega^\varepsilon = \varepsilon$. On en déduit facilement que

$$\llbracket 0, \varepsilon_0 \rrbracket = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \llbracket 0, \omega^{\uparrow n,0} \rrbracket$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega^{\uparrow n,0}$ est f.o.d, et nous aurons terminé.

Bien entendu, $\omega^{\uparrow 0,0} = 0$ est f.o.d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\omega^{\uparrow n,0}$ est f.o.d. Comme ω est dénombrable, il en résulte que $\omega^{\uparrow n+1,0} = \omega^{\omega^{\uparrow n,0}}$ est aussi f.o.d. L'intervalle $\llbracket 0, \varepsilon_0 \rrbracket$ est ainsi une réunion dénombrable d'ensembles f.o.d, il est donc lui aussi f.o.d. Comme il n'est pas fini, il est dénombrable. $\square$

À ce stade, il est logique de se demander s'il existe des ordinaux infinis non dénombrables. Ce qui précède nous incite à penser que ce n'est pas par des sommes, des produits, des puissances, ni même des « passages à la limite » que nous obtiendrons de tels ordinaux. S'il existe un ordinal non dénombrable, il ne sera pas « constructible » à partir d'objets que nous connaissons bien.

4 Ordinaux non dénombrables

Nous allons dans cette section montrer par des moyens élémentaires qu'il existe des ordinaux non dénombrables.

Lemme 6.10. *Soient α et β deux ordinaux. On suppose qu'il existe une bijection strictement croissante $f : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \llbracket 0, \beta \rrbracket$. Alors, $\alpha = \beta$ et $f = id$.*

Démonstration. Montrons par induction sur γ que pour tout ordinal $\gamma < \alpha$, on a $\gamma < \beta$ et $f(\gamma) = \gamma$.

Soit $\gamma \in \text{ON}$. Supposons que $\gamma < \alpha$ et que pour tout ordinal $\delta < \gamma$, $\delta < \beta$ et $f(\delta) = \delta$. On ne peut pas avoir $f(\gamma) < \gamma$, sinon, en posant $\delta = f(\gamma)$, on a par l'hypothèse d'induction $f(\delta) = \delta = f(\gamma)$, ce qui contredit l'injectivité de f .

Si $\llbracket 0, \alpha \rrbracket$ ne contient pas d'ordinaux strictement supérieurs à γ , alors la seule possibilité est $f(\gamma) = \gamma$, ce qui oblige $\gamma < \beta$. Sinon, supposons que $f(\gamma) > \gamma$. On a $f(\gamma) \in \llbracket 0, \beta \rrbracket$, donc $\gamma < f(\gamma) < \beta$. On a alors

- Pour tout $\delta < \gamma$, $f(\delta) = \delta \neq \gamma$.
- Pour tout $\delta \geq \gamma$, par la croissance de f , $f(\delta) \geq f(\gamma) > \gamma$. De là, γ n'a pas d'antécédent par f , ce qui contredit la surjectivité de f .

On en déduit que $f(\gamma) = \gamma$, et donc que $\gamma < \beta$.

Pour résumer, pour tout $\gamma \in \llbracket 0, \alpha \rrbracket$, $f(\gamma) = \gamma$. Comme f est surjective, nécessairement $\alpha = \beta$. $\square$

Proposition 6.11. *Soit $\preceq$ un bon ordre sur $\mathbb{N}$. Il existe un unique ordinal dénombrable α et une unique bijection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \llbracket 0, \alpha \rrbracket$ strictement croissante.*

Démonstration. Pour l'unicité, supposons que α et β sont deux ordinaux dénombrables, et $f : \mathbb{N} \longrightarrow \llbracket 0, \alpha \rrbracket$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \llbracket 0, \beta \rrbracket$ sont deux bijections strictement croissantes. Alors $g \circ f^{-1} : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \llbracket 0, \beta \rrbracket$ est une bijection strictement croissante. Par le lemme précédent, $\alpha = \beta$ et $g^{-1} \circ f = id$, c'est à dire $f = g$.

Montrons maintenant l'existence. Définissons par récursion sur l'ordinal α l'ensemble E_α comme suit. Pour tout $\alpha \in ON$, soit

$$F = \bigcup_{\beta < \alpha} E_\beta$$

Si $F \neq \mathbb{N}$, $E_\alpha = F \cup \{\min(\mathbb{N} \setminus F)\}$. Sinon, $E_\alpha = \mathbb{N}$.

Supposons que pour tout ordinal α , $E_\alpha \neq \mathbb{N}$. Les ensembles E_α sont alors inclus strictement les uns dans les autres, et donc distincts deux à deux. L'application $f : \alpha \longmapsto E_\alpha$ est donc une injection de ON dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Un inverse à gauche de f est alors une surjection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur ON , ce qui est impossible car ON est une classe propre. Ainsi, il existe un ordinal α tel que $E_\alpha = \mathbb{N}$. Prenons un tel α minimal.

Remarquons que pour tout $\beta < \alpha$, E_β possède un plus grand élément. Appelons-le $f(\beta)$. Nous venons donc de définir une application $f : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \mathbb{N}$. La fonction f est strictement croissante (donc injective) et par notre choix de α elle est surjective. Ainsi, f est un isomorphisme. $\square$

lemme 6.12. *Soit α un ordinal dénombrable. Il existe un bon ordre $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ tel que les ensembles ordonnés $(\mathbb{N}, \preceq)$ et $(\llbracket 0, \alpha \rrbracket, \leq)$ soient isomorphes.*

Démonstration. Comme α est dénombrable, il existe une bijection $f : \llbracket 0, \alpha \rrbracket \longrightarrow \mathbb{N}$. Posons, pour tous entiers m et n , $m \preceq n$ si et seulement si $f^{-1}(m) \leq f^{-1}(n)$. On vérifie facilement que $\preceq$ est un bon ordre sur $\mathbb{N}$ qui répond à la question. $\square$

Lemme 6.13. *La classe ON_d des ordinaux dénombrables est un ensemble.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ l'ensemble des bons ordres sur $\mathbb{N}$. Soit $F : \mathcal{B} \longrightarrow \text{ON}_d$ définie pour tout bon ordre $\preceq$ sur $\mathbb{N}$ par $F(\preceq) =$ l'unique ordinal α tel que $(N, \preceq) \longleftrightarrow ([0, \alpha], \leq)$. Par le lemme 12, l'application F est surjective. On a donc

$$F(\mathcal{B}) = \text{ON}_d$$

Ainsi, ON_d est l'image d'un ensemble par une application. Par le schéma d'axiomes de remplacement, ON_d est un ensemble. $\square$

Proposition 6.14. *Il existe un ordinal infini non dénombrable.*

Démonstration. En effet, ON est une classe propre. On conclut avec le lemme précédent. $\square$

Notons ω_1 le plus petit ordinal non dénombrable.

Peut-on « voir » ω_1 , en faire une représentation graphique, comme nous l'avons déjà fait pour ω , $\omega \times 2$, ω^2 , etc ? Si nous avons pu visualiser ces ordinaux dénombrables, c'est parce que nous disposions de fonctions strictement croissantes des ensembles $[0, \omega]$, $[0, \omega \times 2]$, $[0, \omega^2]$, etc, vers $\mathbb{R}$. Il existe en fait un résultat très général à ce propos.

Proposition 6.15. *Soit $(A, \leq)$ un ensemble dénombrable totalement ordonné. Il existe une bijection strictement croissante de A sur une partie de $\mathbb{Q}$.*

Nous allons tout d'abord définir une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$.

Définition 6.2. Notons $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ où les a_n sont distincts deux à deux. Construisons une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{Q}$ en définissant $f(a_n)$ par récurrence forte sur n .

Posons $f(a_0) = 0$. Puis, pour tout $n \geq 1$,

1. Si pour tout $j \in [0, n-1]$, $a_n < a_j$, on pose

$$f(a_n) = \min\{f(a_j) : j \in [0, n-1]\} - 1$$

2. Si pour tout $k \in [0, n-1]$, $a_n > a_k$, on pose

$$f(a_n) = \max\{f(a_k) : k \in [0, n-1]\} + 1$$

3. Sinon, il existe $j \in [0, n-1]$ et $k \in [0, n-1]$ tels que $a_j < a_n$ et $a_k > a_n$. On choisit j et k tels que $a_n - a_j$ et $a_k - a_n$ soient minimaux et on pose

$$f(a_n) = \frac{1}{2} (f(a_j) + f(a_k))$$

Lemme 6.16. *La fonction f est strictement croissante.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$A_n = \{a_k : k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$$

Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction de f à A_n est strictement croissante. C'est clair pour $n = 0$. Soit $n \geq 1$. Supposons que la restriction de f à A_{n-1} est strictement croissante. Soient $a, a' \in A_n$. Supposons $a < a'$. Si $a, a' \in A_{n-1}$ alors, par l'hypothèse de récurrence $f(a) < f(a')$. Supposons maintenant que $a = a_n$ ou $a' = a_n$. Par exemple, $a' = a_n$. L'autre cas se traite de façon analogue. Soit $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $a = a_m$.

Montrons, pour chacun des trois cas de la définition de f , que $f(a) < f(a')$.

1. Supposons que pour tout $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_n < a_j$. On a en particulier $a' = a_n < a_m = a$. Ce cas est donc impossible.
2. Supposons que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_n > a_k$. On a alors

$$\begin{aligned} f(a') &= f(a_n) \\ &= \max\{f(a_k) : k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} + 1 \\ &\geq f(a_m) + 1 \\ &> f(a_m) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

3. Supposons qu'il existe $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $a_j < a_n$ et $a_k > a_n$. Choisissons j et k tels que $a_n - a_j$ et $a_k - a_n$ soient minimaux. On a $a_n - a_j \geq a_n - a_m$, et donc $a_m \leq a_j$. Par l'hypothèse de récurrence, $f(a_m) \leq f(a_j)$ et donc

$$f(a') = \frac{1}{2}(f(a_j) + f(a_k)) \geq \frac{1}{2}(f(a_m) + f(a_k))$$

Remarquons maintenant que $a_j < a_k$. Par l'hypothèse de récurrence, $f(a_j) < f(a_k)$ et donc, a fortiori, $f(a_m) < f(a_k)$. Ainsi,

$$f(a') \geq \frac{1}{2}(f(a_m) + f(a_k)) > f(a_m) = f(a)$$

Montrons pour terminer que f est strictement croissante. Soient $a, a' \in A$. Supposons $a < a'$. Il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $a = a_m$ et $a' = a_n$. On a alors $a, a' \in A_p$ où $p = \max(m, n)$. Comme la restriction de f à A_p est strictement croissante, on en déduit que $f(a) < f(a')$. $\square$

La démonstration de la proposition est maintenant immédiate.

Démonstration. La fonction f que nous avons défini ci-dessus est une bijection strictement croissante de A sur $f(A) \subseteq \mathbb{Q}$. $\square$

Est-il possible de construire une bijection strictement croissante de ω_1 sur une partie de $\mathbb{R}$? La réponse est non.

Proposition 6.17. *Il n'existe pas de fonction strictement croissante de $\llbracket 0, \omega_1 \rrbracket$ vers $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons qu'une telle fonction f existe. Pour tout ordinal $\alpha < \omega_1$, on a $\alpha^+ < \omega_1$. Par la croissance stricte de f , $f(\alpha) < f(\alpha^+)$. L'intervalle $I_\alpha =]f(\alpha), f(\alpha^+)[$ est ainsi un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, qui contient au moins un rationnel q_α . Toujours par la croissance stricte de f , les intervalles I_α sont disjoints deux à deux. Les rationnels q_α sont donc distincts deux à deux. On obtient donc une contradiction, puisque $\mathbb{Q}$ est dénombrable. $\square$

Il faut donc se rendre à l'évidence : nous pourrions jamais voir ω_1 .

Deuxième partie

Les ordinaux de Von
Neumann

Dans la première partie de ce livre, nous avons développé une théorie « axiomatique » des ordinaux : les ordinaux sont les éléments d'une classe propre bien ordonnée dont les segments initiaux sont des ensembles. Dans les trois prochains chapitres, nous allons donner une construction de la classe des ordinaux, et montrer que toutes les classes satisfaisant aux propriétés caractéristiques de la classe des ordinaux sont isomorphes.

La construction que nous allons donner est due à Von Neumann.

Nous allons procéder par étapes. Tout d'abord, nous allons revenir plus en détail sur les propriétés des ensembles bien ordonnés. Nous parlerons ensuite de la notion d'ensemble transitif. Enfin, nous introduirons les *ordinaux de Von Neumann*, qui sont des ensembles transitifs bien ordonnés.

Chapitre 7

Ensembles bien ordonnés

1 Introduction

1.1 Ordre, ordre total, bon ordre

Le lecteur est évidemment familier avec la notion d'ensemble ordonné, mais reprenons les choses depuis le début.

Définition 7.1. Une relation binaire $\leq$ sur un ensemble E est une *relation d'ordre* si elle est

- réflexive : pour tout $x \in E$, $x \leq x$.
- antisymétrique : pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ et $y \leq x$ implique $x = y$.
- transitive : pour tous $x, y, z \in E$, $x \leq y$ et $y \leq z$ implique $x \leq z$.

Un couple $(E, \leq)$ où $\leq$ est un ordre sur E est appelé un *ensemble ordonné*.

Définition 7.2. Une relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble E est un ordre *total* si pour tous $x, y \in E$, $x \leq y$ ou $y \leq x$. Sinon, c'est un ordre *partiel*.

La relation usuelle $\leq$ sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est un ordre total. En revanche, la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par $f \leq g$ si et seulement si pour tout x réel $f(x) \leq g(x)$ est un ordre partiel : si $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x$, alors $f \not\leq g$ et $g \not\leq f$.

Définition 7.3. Une relation d'ordre $\leq$ sur l'ensemble E est un *bon ordre* si toute partie non vide de E possède un plus petit élément pour la relation $\leq$. Plus explicitement, pour toute partie A non vide de E , il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $a \leq x$.

Proposition 7.1. Un bon ordre est un ordre total.

Démonstration. Soient x et y deux éléments de l'ensemble bien ordonné $(E, \leq)$. L'ensemble $\{x, y\}$ admet un plus petit élément. Si c'est x , alors $x \leq y$. Si c'est y , alors $y \leq x$. $\square$

1.2 Exemples

Proposition 7.2. Tout ensemble fini totalement ordonné est bien ordonné.

Démonstration. Prouvons ce résultat par récurrence sur le cardinal de E . Clairement, l'ensemble vide est bien ordonné (on laisse au lecteur le soin d'y définir un ordre total). Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que tout ensemble totalement ordonné de cardinal n est bien ordonné. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné de cardinal $n + 1$. Écrivons $E = E' \cup \{a\}$ où $a \in E$ et E' est fini de cardinal n . Remarquons que $(E', \leq)$ est totalement ordonné.

Soit A une partie non vide de E . Soit $A' = A \cap E'$. Par l'hypothèse de récurrence, A' admet un plus petit élément b dans E' . Deux cas se présentent.

- Si $a \notin A$, alors b est aussi le plus petit élément de A dans E .
- Si $a \in A$, comme $\leq$ est un ordre total, a et b sont comparables par la relation $\leq$. Facilement, $\min A = \min(a, b)$.

□

Existe-t-il des ensembles infinis bien ordonnés ? Comme nous venons juste de faire une récurrence, le lecteur est sans doute convaincu de l'existence de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, ainsi que de la validité du principe de récurrence. Il s'avère que l'on a la propriété suivante.

Proposition 7.3. *Le principe de récurrence est équivalent à la propriété « $\mathbb{N}$ est bien ordonné ».*

Démonstration. Supposons que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément. Soit φ une formule. Supposons que si $\varphi(0)$ est vérifiée et, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \implies \varphi(n+1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n)$. Considérons l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \varphi(n)\}$$

Supposons que $A \neq \mathbb{N}$. L'ensemble $B = \mathbb{N} \setminus A$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc B possède un plus petit élément b . On n'a pas $b = 0$ puisque $\varphi(0)$ est vérifiée, et donc $0 \in A$. Ainsi $a = b - 1 \in \mathbb{N}$. Comme $a < b$, par la minimalité de b , on a $a \in A$. Mais alors, on a $\varphi(a)$, donc $\varphi(a+1)$ c'est à dire $\varphi(b)$, donc $b \in A$, contradiction.

Supposons inversement le principe de récurrence vérifié : pour toute formule φ , si $\varphi(0)$ est vérifiée et, de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \implies \varphi(n+1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n)$.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$. Soit $B = \mathbb{N} \setminus A$. Considérons la formule

$$\varphi(n) = \forall k \leq n, k \in B$$

On n'a pas pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ puisque, A étant non vide, $B \neq \mathbb{N}$. L'un des prémisses du principe de récurrence est donc faux.

- Si $\neg\varphi(0)$, alors $0 \in A$ donc A a un plus petit élément, à savoir 0.
- S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n)$ et $\neg\varphi(n+1)$, alors pour tout $k \leq n$, on a $k \in B$ mais il existe $k \leq n+1$ tel que $k \in A$. Posons $a = n+1$. On a pour tout $k < a$, $k \notin A$ et $a \in A$. Soit $n \in A$. On n'a pas $n < a$, donc $a \leq n$. Ainsi, a est le plus petit élément de A .

□

En revanche, les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas bien ordonnés. Par exemple, $\mathbb{R}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, et pourtant $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément. En fait, même $\mathbb{R}_+$ n'est pas bien ordonné. En effet, toute partie non vide de $\mathbb{R}_+$ possède une *borne inférieure*, ce qui n'est pas la même chose qu'un plus petit élément : l'intervalle $]0, 1]$ a une borne inférieure mais pas de plus petit élément.

Les ensembles bien ordonnés sont donc des ensembles *très spéciaux*. Le reste du chapitre va en explorer les premières propriétés. Dans la suite, tous les ensembles considérés seront totalement ordonnés, et même la plupart du temps bien ordonnés.

Le lecteur pourrait, à ce stade, se demander si à part $\mathbb{N}$ et les ensembles finis, il existe des ensembles bien ordonnés. Il y en a, et même beaucoup. Prenons un exemple. Soit

$$\mathbb{N} \oplus \mathbb{N} = (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \{1\}) = \mathbb{N}_0 \cup \mathbb{N}_1$$

L'ensemble $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ est la réunion de deux « copies » de $\mathbb{N}$. Définissons sur $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ une relation $\leq$ en posant

$$(m, a) \leq (n, b) \iff (a < b) \vee (a = b \wedge m \leq n)$$

Dit autrement, les éléments de $\mathbb{N}_0$ sont strictement inférieurs à ceux de $\mathbb{N}_1$, et sur $\mathbb{N}_0$ et $\mathbb{N}_1$ la relation $\leq$ est l'ordre usuel sur les entiers naturels.

Proposition 7.4. $(\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné.

Démonstration. On laisse au lecteur le soin de montrer que $\leq$ est un ordre sur $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$. Il s'agit en fait de ce que l'on appelle *l'ordre lexicographique*.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$. Écrivons $A = A_0 \cup A_1$ où $A_i = A \cap \mathbb{N}_i$. Plusieurs cas se présentent.

- Cas 1, $A_0 = \emptyset$ (et donc $A_1 \neq \emptyset$). Soit

$$A'_1 = \{a \in \mathbb{N} : (a, 1) \in A_1\}$$

Comme A_1 n'est pas vide, A'_1 est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui possède donc un plus petit élément a . On vérifie facilement que $\min A = (a, 1)$.

- Cas 2, $A_0 \neq \emptyset$. Soit

$$A'_0 = \{a \in \mathbb{N} : (a, 0) \in A_0\}$$

Comme A_0 n'est pas vide, A'_0 est une partie non vide de $\mathbb{N}$, qui possède donc un plus petit élément a . On vérifie facilement que $\min A = (a, 0)$.

□

1.3 Segments initiaux

La notion de segment initial joue un rôle fondamental dans l'étude des ensembles bien ordonnés.

Définition 7.4. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $S \subseteq E$. S est un *segment initial* de E si

- $S \neq E$.
- Pour tout $a \in S$, pour tout $x \in E$, si $x < a$ alors $x \in S$.

Notation. Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $a \in E$. On note

$$E[a] = \{x \in E : x < a\}$$

La seconde condition sur les segments initiaux s'écrit donc :

$$\forall a \in S, E[a] \subseteq S$$

Remarquons tout d'abord l'évidence.

Proposition 7.5. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $a \in E$. L'ensemble $E[a]$ est un segment initial de E .*

Démonstration.

- Tout d'abord, $a \notin E[a]$, donc $E[a] \neq E$.
- Soit $x \in E[a]$. Soit $y \in E[x]$. On a $y < x < a$, donc $y < a$, donc $y \in E[a]$.

□

Définition 7.5. $E[a]$ est le *segment initial défini par a* .

Proposition 7.6. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble totalement ordonné. Une réunion de segments initiaux de E est égale à E , ou est un segment initial de E .*

Démonstration. Soit $(S_i)_{i \in I}$ une famille de segments initiaux de E . Soit $S = \bigcup_{i \in I} S_i$. Soit $a \in S$. Il existe $i \in I$ tel que $a \in S_i$. De là, $E[a] \subseteq S_i$ et donc $E[a] \subseteq S$. Ainsi, si $S \neq E$, S est un segment initial de E . □

Un ensemble totalement ordonné quelconque peut posséder des segments initiaux qui ne sont pas de la forme $E[a]$. Par exemple, $\mathbb{R}_-$ est un segment initial de $\mathbb{R}$, alors que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}[a] =]-\infty, a[$. En revanche, la situation est très simple dans un ensemble bien ordonné.

Proposition 7.7. *Soit $(E, \leq)$ un ensemble bien ordonné. Soit $S \subseteq E$. Alors, S est un segment initial de E si et seulement si il existe $a \in E$ tel que $S = E[a]$.*

Démonstration. Nous savons déjà que pour tout $a \in E$, $E[a]$ est un segment initial de E .

Inversement, supposons que S est un segment initial de E . Soit $T = E \setminus S$. Comme $S \neq E$, $T \neq \emptyset$. T possède donc un plus petit élément a . Montrons que $S = E[a]$. Soit $x > a$. Alors, $E[x] \not\subseteq S$ puisque $a \in E[x]$. Donc, $x \notin S$. Soit maintenant $x < a$. Alors, comme $a = \min T$, $x \notin T$ donc $x \in S$. Enfin, $a \in T$ donc $a \notin S$. Ainsi, $x \in S$ si et seulement si $x < a$. □

2 Isomorphismes

2.1 Notion d'isomorphisme

Définition 7.6. Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \rightarrow F$ est *strictement croissante* si pour tous $x, y \in E$,

$$x < y \implies f(x) \prec f(y)$$

Définition 7.7. Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés. Une application $f : E \rightarrow F$ est un *isomorphisme* de $(E, \leq)$ sur $(F, \preceq)$ si

- f est bijective.
- f est strictement croissante.
- f^{-1} est strictement croissante.

Les ensembles ordonnés $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de $(E, \leq)$ sur $(F, \preceq)$.

Notation. Nous noterons $(E, \leq) \longleftrightarrow (F, \preceq)$, ou même $E \longleftrightarrow F$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, lorsque les ensembles ordonnés E et F sont isomorphes.

Exercice. Montrer que la composée de deux isomorphismes, la réciproque d'un isomorphisme, sont encore des isomorphismes. Montrer que si $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné, l'application id_E est un isomorphisme de $(E, \leq)$ sur lui-même (ce que l'on appelle aussi un *automorphisme* de $(E, \leq)$).

Les isomorphismes transportent d'une certaine façon la structure ordonnée d'un ensemble sur un autre. Voici un exemple de cette affirmation.

Proposition 7.8. Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles ordonnés isomorphes. On suppose $(E, \leq)$ bien ordonné. Alors, $(F, \preceq)$ est bien ordonné.

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme. Soit B une partie non vide de F . Soit $A = f^{-1}(B)$. L'ensemble A est une partie non vide de E , il possède donc un plus petit élément a . Posons $b = f(a)$. Comme $a \in A$, on a $b \in B$. De plus, pour tout $y \in B$, on a $f^{-1}(y) \in A$, donc $a \leq f^{-1}(y)$, d'où, par la croissance de f ,

$$b = f(a) \preceq f(f^{-1}(y)) = y$$

Ainsi, b est le plus petit élément de B . $\square$

Remarque. Dans le cas général, la troisième condition portant sur la croissance stricte de f^{-1} est indispensable. Pour en montrer la nécessité, prenons un exemple. Soit $E = \{a, b, c\}$, où $a < c$, $b < c$ et a, b ne sont pas comparables. Soit $F = \{x, y, z\}$ où $x < y$, $x < z$ et $y < z$. L'application $f : E \rightarrow F$ qui envoie a, b, c sur x, y, z est bijective et strictement croissante. Mais f^{-1} n'est pas strictement croissante, parce que $x < y$ mais $a = f^{-1}(x) \not\prec b = f^{-1}(y)$.

La proposition suivante montre que si les ensembles sont totalement ordonnés, la troisième condition est automatiquement vérifiée lorsque les deux premières le sont.

Proposition 7.9. *Soient $(E, \leq)$ et $(F, \preceq)$ deux ensembles totalement ordonnés. Une application $f : E \rightarrow F$ est un isomorphisme si et seulement si f est bijective et strictement croissante.*

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection strictement croissante. Montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ deux éléments de F . Supposons $y < y'$. L'ensemble E étant totalement ordonné, on a $x' \leq x$ ou $x < x'$. Comme f est croissante, $x' \leq x$ entraîne $y' = f(x') \preceq f(x) = y$, ce qui n'est pas. Donc, $x < x'$, c'est à dire $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$. $\square$

Dans la suite, nous allons nous concentrer sur les isomorphismes entre ensembles bien ordonnés. Nous montrerons qu'ils possèdent de nombreuses propriétés intéressantes.

Convention. Sauf mention contraire, lorsque nous introduirons dans la suite des ensembles ordonnés, nous sous-entendrons la relation d'ordre. Nous noterons celle-ci par le symbole générique $\leq$.

2.2 Propriétés faciles

Proposition 7.10. *Soit E un ensemble bien ordonné. Soit $f : E \rightarrow E$ une application strictement croissante. Alors, pour tout $x \in E$, $x \leq f(x)$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in E$ tel que

$$f(x) < x$$

Prenons un tel x minimal (bon ordre). On a alors, par la croissance stricte de f ,

$$f(f(x)) < f(x)$$

Ainsi, en posant $y = f(x)$, $f(y) < y$, ce qui contredit la minimalité de x puisque $y < x$. $\square$

Proposition 7.11. *Soit E un ensemble bien ordonné. Le seul isomorphisme de E sur lui-même est id_E .*

Démonstration. Soit $f : E \rightarrow E$ un isomorphisme. Soit $g = f^{-1}$. f et g sont strictement croissantes. Par la proposition précédente, on a donc pour tout $x \in E$,

$$x \leq f(x) \leq g(f(x)) = x$$

Ainsi, $f(x) = x$. $\square$

Corollaire 7.12. *Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. Il existe au plus un isomorphisme de E sur F .*

Démonstration. Soient f et g deux isomorphismes de E sur F . Alors $g^{-1} \circ f$ est un isomorphisme de E sur E , donc $g^{-1} \circ f = id_E$, c'est à dire $f = g$. $\square$

Proposition 7.13. *Il n'existe pas d'application strictement croissante (et a fortiori pas d'isomorphisme) d'un ensemble bien ordonné E vers un de ses segments initiaux.*

Démonstration. Soit $a \in E$. Supposons $f : E \rightarrow E[a]$ strictement croissante. On a alors $f(a) \in E[a]$ donc $f(a) < a$, contradiction car f est strictement croissante et donc pour tout $x \in E$, $f(x) \geq x$. $\square$

Corollaire 7.14. *Deux segments initiaux de l'ensemble bien ordonné E sont isomorphes si et seulement si ils sont égaux.*

Démonstration. Soient $a, a' \in E$. Supposons $a \neq a'$, par exemple $a < a'$. Alors, $E[a]$ est un segment initial de l'ensemble bien ordonné $E[a']$ donc il n'existe pas d'isomorphisme de $E[a']$ sur $E[a]$. $\square$

Proposition 7.15. *Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme entre deux ensembles bien ordonnés. Alors, pour tout $a \in E$, $f(E[a]) = F[b]$ où $b = f(a)$.*

Démonstration. Soit $a \in E$. L'application f est un isomorphisme de $E[a]$ sur $F' = f(E[a])$. Montrons que $F' = F[b]$.

Soit $y \in F'$. Il existe $x \in E[a]$ tel que $y = f(x)$. De $x < a$ et de la croissance stricte de f , on déduit $y = f(x) < f(a) < b$. Ainsi, $y \in F[b]$.

Soit $y \in F[b]$. Soit $x = f^{-1}(y)$. De $y < b$ et de la croissance stricte de f^{-1} , on déduit $x = f^{-1}(y) < f^{-1}(b) = a$. Ainsi, $x \in E[a]$ et donc $y \in f(E[a])$. $\square$

3 Le théorème fondamental

3.1 L'énoncé

Proposition 7.16. *Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. Alors, on est dans un, et un seul des trois cas suivants.*

- $E \longleftrightarrow F$.
- Il existe $b \in F$ tel que $E \longleftrightarrow F[b]$.
- Il existe $a \in E$ tel que $E[a] \longleftrightarrow F$.

Ce résultat est un résultat très fort. Il nous raconte que deux ensembles bien ordonnés quelconques sont toujours, d'une certaine façon, comparables l'un à

l'autre. Précisément, à isomorphisme près, soit ils sont égaux soit l'un est un segment initial de l'autre. Nous allons prouver cette proposition en plusieurs étapes.

3.2 La preuve

Commençons par montrer que les trois cas s'excluent mutuellement. Par exemple, si $f : F \rightarrow E[a]$ et $g : E \rightarrow F[b]$ sont deux isomorphismes, alors $g \circ f : F \rightarrow F[b]$ est strictement croissante. La proposition 13 nous dit que ceci est impossible.

Pour prouver que l'on est dans un des trois cas, nous allons tout d'abord considérer un ensemble $\mathcal{F}$ de couples de $E \times F$. Soit

$$\mathcal{F} = \{(a, b) \in E \times F : E[a] \simeq F[b]\}$$

Pour tout couple $(a, b) \in \mathcal{F}$, nous noterons φ_{ab} l'unique isomorphisme de $E[a]$ sur $F[b]$. Notons également

$$E' = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{F}} E[a]$$

Soit $f : E' \rightarrow F$ définie comme suit. Pour tout $x \in E'$, il existe $(a, b) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in E[a]$. On pose alors $f(x) = \varphi_{ab}(x)$.

Lemme 7.17. *L'application f est bien définie.*

Démonstration. Soient (a, b) et (a', b') deux éléments de $\mathcal{F}$ tels que $x \in E[a]$ et $x \in E[a']$.

On a par exemple $a' \leq a$, et donc $E[a'] \subseteq E[a]$. La restriction de φ_{ab} à $E[a']$ est un isomorphisme de $E[a']$ sur un segment initial de $F[b]$. Ce segment initial est isomorphe par l'application $\varphi_{a'b'} \circ \varphi_{ab}^{-1}$ à $F[b']$. Or, deux segments initiaux de F sont isomorphes si et seulement si ils sont égaux. Ainsi, la restriction de φ_{ab} à $E[a']$, tout comme $\varphi_{a'b'}$, est un isomorphisme de $E[a']$ sur $F[b']$. On en déduit que $\varphi_{a'b'}$ est la restriction de φ_{ab} à $E[a']$ et donc que $\varphi_{a'b'}(x) = \varphi_{ab}(x)$. $\square$

Lemme 7.18. *f est strictement croissante.*

Démonstration. Soient $x, x' \in E'$. Supposons que $x < x'$. Soient (a, b) et $(a', b') \in \mathcal{F}$ tels que $x \in E[a]$ et $x' \in E[a']$. On a $x < x' < a'$ donc $x \in E[a']$. On a

$$f(x) = \varphi_{a'b'}(x) < \varphi_{a'b'}(x') = f(x')$$

$\square$

Notons maintenant

$$F' = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{F}} F[b]$$

Soit $x \in E'$. Il existe $(a, b) \in \mathcal{F}$ tel que $x \in E[a]$. On a alors $f(x) = \varphi_{ab}(x) \in F[b] \subseteq F'$. Ainsi, pour tout $x \in E'$, $f(x) \in F'$.

Lemme 7.19. *L'application $f : E' \longrightarrow F'$ est surjective.*

Démonstration. Soit $y \in F'$. Il existe $(a, b) \in \mathcal{F}$ tel que $y \in F[b]$. Il existe un unique $x \in E[a]$ tel que $y = \varphi_{ab}(x) = f(x)$. Ainsi, y a un antécédent par f . $\square$

L'application f est donc un isomorphisme de E' sur F' . Remarquons maintenant que E' est une réunion de segments initiaux de E . Donc $E' = E$ ou alors E' est un segment initial de E . De même, $F' = F$ ou alors F' est un segment initial de F . Quatre cas se présentent. Dans trois des quatre cas, la conclusion est immédiate.

- Si $E' = E$ et $F' = F$, alors $E \longleftrightarrow F$.
- S'il existe $a \in E$ tel que $E' = E[a]$, et si $F' = F$, alors $E[a] \longleftrightarrow F$.
- Si $E' = E$ et s'il existe $b \in F$ tel que $F' = F[b]$, alors, $E \longleftrightarrow F[b]$.

Il reste à regarder ce qui se passe dans le dernier cas. Supposons donc qu'il existe $a \in E$ tel que $E' = E[a]$ et $b \in F$ tel que $F' = F[b]$. Soit

$$\varphi : E[a] \cup \{a\} \longrightarrow F[b] \cup \{b\}$$

définie par $\varphi(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $\varphi(a) = b$. Clairement, φ est un isomorphisme.

Supposons un instant que $a \neq \max E$ et $b \neq \max F$. Soient a' et b' les successeurs de a et b . Alors $E[a] \cup \{a\} = E[a']$ et $F[b] \cup \{b\} = F[b']$ sont isomorphes, donc $(a', b') \in \mathcal{F}$, d'où $E[a'] \subseteq E'$. Mais alors

$$a \in E[a'] \subseteq E' = E[a]$$

Contradiction. Ainsi, on a nécessairement $a = \max E$ ou $b = \max F$.

- Si $a = \max E$ et $b \neq \max F$, alors φ est un isomorphisme de E sur $F[b']$.
- Si $a \neq \max E$ et $b = \max F$, alors φ est un isomorphisme de $E[a']$ sur F .
- Si $a = \max E$ et $b = \max F$, alors φ est un isomorphisme de E sur F .

3.3 Un préordre total sur les ensembles bien ordonnés

Soient E et F deux ensembles bien ordonnés. Nous noterons $E \prec F$ lorsqu'il existe un isomorphisme de E sur un segment initial de F . Nous noterons $E \preceq F$ lorsque $E \prec F$ ou $E \longleftrightarrow F$.

Proposition 7.20. *Pour tous ensembles bien ordonnés E, F, G ,*

- *Irréflexivité : $E \not\prec E$.*
- *Transitivité : Si $E \prec F$ et $F \prec G$, alors $E \prec G$.*
- *Ordre total : $E \prec F$ ou bien $F \prec E$ ou bien $E \longleftrightarrow F$.*

Ainsi, la relation $\prec$ est un ordre strict sur la classe des ensembles bien ordonnés. Mieux, cet ordre est total à isomorphisme près.

Démonstration.

- Par la proposition 13, il n'existe pas d'isomorphisme de E sur un segment initial de E , donc $E \not\prec E$.

- Supposons $E \prec F$ et $F \prec G$. Soient $f : E \rightarrow F[b]$ et $g : F \rightarrow G[c]$ deux isomorphismes, où $b \in F$ et $c \in G$. La restriction g' de g à $F[b]$ est un isomorphisme de $F[b]$ sur un segment initial $G[c']$ de $G[c]$. De là, $g' \circ f : E \rightarrow G[c']$ est un isomorphisme, et donc $E \prec G$.
- Le dernier point résulte directement du théorème fondamental.

□

Remarque. L'irréflexivité et la transitivité entraînent l'asymétrie : si $E \prec F$ alors $F \not\prec E$. En effet, si $E \prec F$ et $F \prec E$ alors, par la transitivité, $E \prec E$ ce qui contredit l'irréflexivité.

Bilan. Tous les ensembles bien ordonnés sont, à isomorphisme près, des segments initiaux les uns des autres. On se plaît à rêver d'un « super ensemble » bien ordonné dont *tous* les ensembles bien ordonnés seraient (isomorphes à) des segments initiaux. Nous allons plus ou moins, dans les chapitres suivants, réaliser ce rêve, sauf que ce super ensemble ne sera pas un ensemble mais une *classe propre*. Ce sera la classe des ordinaux.

3.4 Extension aux classes

En reprenant le détails des preuves faites depuis le début de cet article, on voit que le théorème fondamental s'étend aux *classes*.

Proposition 7.21. *Soient C et D deux classes propres bien ordonnées. Alors, on est dans un, et seul, des trois cas suivants.*

- $C \longleftrightarrow D$.
- Il existe $b \in D$ tel que $C \longleftrightarrow D[b]$.
- Il existe $a \in C$ tel que $C[a] \longleftrightarrow D$.

On a en particulier le résultat suivant.

Proposition 7.22. *Soient C et D deux classes propres bien ordonnées. On suppose que les segments initiaux de C et de D sont des ensembles. Alors, $C \longleftrightarrow D$.*

Démonstration. Il ne peut pas exister $b \in D$ tel que $C \longleftrightarrow D[b]$. En effet, $D[b]$ est un ensemble est C est une classe propre. De même, il ne peut pas exister $a \in C$ tel que $C[a] \longleftrightarrow D$. Ainsi, $C \longleftrightarrow D$. □

Nous avons vu dans la première partie de ce livre que la classe des ordinaux est une classe propre bien ordonnée dont les segments initiaux sont des ensembles. Par la proposition précédente, la classe ON des ordinaux est donc définie, à isomorphisme près, de façon unique par

- ON est une classe propre.
- $(\text{ON}, \leq)$ est bien ordonnée.
- Les segments initiaux de ON sont des ensembles.

Tout le problème est donc de prouver son *existence*...

Chapitre 8

Transitivité

Dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel (ZFC), tous les objets de la théorie sont des ensembles. Dans ce chapitre en particulier, il conviendra de garder cela à l'esprit. Les éléments d'un ensemble sont des ensembles, les éléments de ses éléments sont encore des ensembles, etc.

Nous allons introduire une classe d'ensembles très particuliers que l'on appelle les *ensembles transitifs*. Ces ensembles n'apparaissent jamais dans les mathématiques du quotidien, mais ils sont la clé de la construction des ordinaux de Von Neumann, dont nous parlerons au chapitre suivant.

1 Introduction

1.1 Notion d'ensemble transitif

Définition 8.1. Un ensemble E est *transitif* si pour tout $y \in E$, $y \subseteq E$.

Dit autrement, pour tous ensembles x et y ,

$$x \in y \wedge y \in E \implies x \in E$$

L'ensemble E est transitif si les éléments des éléments de E sont des éléments de E . Remarquons que si E est transitif,

$$x \in y \in z \in E \implies x \in y \in E \implies x \in E$$

c'est à dire que les éléments des éléments des éléments de E sont des éléments de E . Plus généralement, une récurrence sur n montre que

$$x_1 \in x_2 \in \dots \in x_n \in E \implies x_1 \in E$$

Pour tout ensemble E , notons

$$\bigcup E = \bigcup_{y \in E} y$$

Les éléments de $\bigcup E$ sont donc les éléments des éléments de E .

Proposition 8.1. L'ensemble E est transitif si et seulement si $\bigcup E \subseteq E$.

Démonstration. Supposons E transitif. Soit $x \in \bigcup E$. Il existe $y \in E$ tel que $x \in y$. Par la transitivité de E , $x \in E$. Ainsi, $\bigcup E \subseteq E$.

Inversement, supposons $\bigcup E \subseteq E$. Soit $y \in E$. Soit $x \in y$. On a alors $x \in \bigcup E$, et donc $x \in E$. Ainsi, E est transitif. $\square$

1.2 Premiers exemples

Tout d'abord, $\emptyset$ est transitif. Pour prendre trois autres exemples, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ sont transitifs. Nous voici donc en possession de 4 ensembles transitifs. En fait, chacun des trois derniers ensembles est bâti à partir du précédent selon une même règle, dont nous allons maintenant parler.

1.3 Successeur

Définition 8.2. Soit E un ensemble. Le *successeur* de E est l'ensemble

$$E^+ = E \cup \{E\}$$

Proposition 8.2. *Le successeur d'un ensemble transitif est encore transitif.*

Démonstration. Soit E un ensemble transitif. Soit $y \in E^+$. Soit $x \in y$.

- Si $y \in E$ alors, par la transitivité de E , $x \in E$ et donc $x \in E^+$.
- Si $y = E$, alors $x \in E$ et donc $x \in E^+$.

□

Pour reprendre nos premiers exemples,

- $\{\emptyset\} = \emptyset^+$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \emptyset^{++}$.
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \emptyset^{+++}$.

L'ensemble suivant de la liste est

$$\emptyset^{++++} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$$

1.4 Les entiers naturels

Tout le monde sait (ou croit savoir) ce qu'est un entier naturel. Nous allons maintenant définir des ensembles un peu particuliers dont nous verrons, au fur et à mesure de notre avancement, qu'ils se comportent exactement comme ce que nous appelons les entiers naturels. Nous avons en fait déjà parlé de ces ensembles dans la première partie du livre.

Définition 8.3. On pose $\bar{0} = \emptyset$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{n+1} = \bar{n}^+$$

On note

$$\omega = \{\bar{n} : n \in \mathbb{N}\}$$

Une récurrence facile montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\bar{n} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Proposition 8.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\bar{n}| = n$.*

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence forte sur n . C'est clair pour $n = 0$. Soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout entier $k < n$, on ait $|\bar{k}| = k$. Les ensembles $\bar{k}$, de cardinaux distincts, sont donc distincts deux à deux. De là,

$$|\bar{n}| = |\{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}| = n$$

□

Proposition 8.4. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ est un ensemble transitif.*

Démonstration. C'est une récurrence immédiate sur n . □

Proposition 8.5. *ω est transitif.*

Démonstration. Soit $x \in \omega$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = \bar{n}$. De là,

$$x = \bar{n} = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\} \subseteq \omega$$

□

2 Opérations sur les ensembles transitifs

2.1 Unions et intersections

Proposition 8.6. *Une réunion et une intersection d'ensembles transitifs sont encore des ensembles transitifs.*

Démonstration. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles transitifs. Soit

$$E = \bigcup_{i \in I} E_i$$

Soit $y \in E$. Soit $x \in y$. Il existe $i \in I$ tel que $y \in E_i$. Comme E_i est transitif, $x \in E_i$, et puisque $E_i \subseteq E$, $x \in E$.

La preuve pour les intersections est identique. □

2.2 Parties d'un ensemble transitif

Proposition 8.7. *Soit E un ensemble transitif. Alors, $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble transitif.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, c'est à dire $A \subseteq E$. Soit $y \in A$. On a donc $y \in E$. Comme E est transitif, $y \subseteq E$ et donc $y \in \mathcal{P}(E)$. □

2.3 Clôture transitive

Il existe des ensembles qui ne sont pas transitifs. En fait, la plupart des ensembles ne le sont pas. Cela dit, tout ensemble est inclus dans un ensemble transitif.

Soit E un ensemble. Posons $F_0 = E$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = \bigcup F_n$. Notons enfin

$$T(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

Proposition 8.8. *$T(E)$ est un ensemble transitif.*

Démonstration. Soit $y \in T(E)$. Soit $x \in y$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in F_n$. On a donc

$$x \in \bigcup F_n = F_{n+1}$$

d'où $x \in T(E)$. Ainsi, $T(E)$ est transitif. $\square$

Proposition 8.9. *Soit F un ensemble transitif contenant E . Alors, $T(E) \subseteq F$.*

Démonstration. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \subseteq F$. Pour $n = 0$, c'est vrai par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $F_n \subseteq F$. Soit $x \in F_{n+1}$. Il existe $y \in F_n$ tel que $x \in y$. Par l'hypothèse de récurrence, $y \in F$. Comme F est transitif, $x \in F$. Ainsi, $F_{n+1} \subseteq F$. De là,

$$T(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \subseteq F$$

$\square$

L'ensemble $T(E)$ est donc le plus petit ensemble transitif contenant E . Nous l'appellerons la *clôture transitive* de E .

Terminons par quelques propriétés faciles de la clôture transitive.

Proposition 8.10. *Soit E un ensemble. On a $E \subseteq T(E)$. Il y a égalité si et seulement si E est transitif.*

Démonstration. En reprenant les notations vues plus haut,

$$F_0 = E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = T(E)$$

Supposons E transitif. Alors, le plus petit ensemble transitif contenant E est clairement E , donc $T(E) = E$.

Inversement, supposons $T(E) = E$. Alors, comme $T(E)$ est transitif, E l'est aussi. $\square$

Proposition 8.11. *Soit E un ensemble. On a $T(T(E)) = T(E)$.*

Démonstration. Par la proposition précédente, comme $T(E)$ est transitif, $T(E)$ est égal à sa clôture transitive. $\square$

Proposition 8.12. *Soient E et F deux ensembles. Si $E \subseteq F$, alors $T(E) \subseteq T(F)$.*

Démonstration. Supposons $E \subseteq F$. On a alors $E \subseteq F \subseteq T(F)$. Ainsi, $T(F)$ est un ensemble transitif contenant E . Par la minimalité de $T(E)$, il en résulte que $T(E) \subseteq T(F)$. $\square$

Proposition 8.13. *Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors,*

$$T\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) = \bigcup_{i \in I} T(E_i)$$

Démonstration. Notons $E = \bigcup_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in I$, $E_i \subseteq E$ et donc, par la croissance de T , $T(E_i) \subseteq T(E)$. De là,

$$\bigcup_{i \in I} T(E_i) \subseteq T(E)$$

De plus, les ensembles $T(E_i)$ sont des ensembles transitifs, donc leur réunion l'est aussi. De plus, pour tout $i \in I$, $E_i \subseteq T(E_i)$, et donc

$$E = \bigcup_{i \in I} E_i \subseteq \bigcup_{i \in I} T(E_i)$$

Par la minimalité de la clôture transitive,

$$T(E) \subseteq \bigcup_{i \in I} T(E_i)$$

$\square$

Proposition 8.14. *Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Alors,*

$$T\left(\bigcap_{i \in I} E_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} T(E_i)$$

Démonstration. Notons $E = \bigcap_{i \in I} E_i$. Pour tout $i \in I$, $E \subseteq E_i$ et donc, par la croissance de T , $T(E) \subseteq T(E_i)$. De là,

$$T(E) \subseteq \bigcap_{i \in I} T(E_i)$$

On n'a pas nécessairement égalité. Prenons par exemple $A = \{\{\emptyset\}\}$ et $B = \{\emptyset\}$. On a alors $T(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ et $T(B) = \{\emptyset\}$. De là,

$$T(A \cap B) = T(\emptyset) = \emptyset \neq T(A) \cap T(B) = \{\emptyset\}$$

□

Chapitre 9

Ordinaux de Von Neumann

1 Notion d'ordinal

1.1 Les ordinaux de Von Neumann

Définition 9.1. Un ordinal de Von Neumann est un ensemble transitif sur lequel la relation $\in$ est un bon ordre strict.

Pour détailler, un ensemble α est un ordinal lorsqu'il vérifie les propriétés suivantes.

- Transitivité : pour tous ensembles β, γ ,

$$\gamma \in \beta \in \alpha \implies \gamma \in \alpha$$

- Irréflexivité : pour tout ensemble β ,

$$\beta \in \alpha \implies \beta \notin \beta$$

- Transitivité : pour tous ensembles β, γ, δ ,

$$\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha \implies \delta \in \beta$$

- Bon ordre : Pour toute partie non vide A de α , il existe $\beta \in A$ tel que, pour tout $\gamma \in A \setminus \{\beta\}$, $\beta \in \gamma$.

Remarquons que nous avons aussi *l'asymétrie* :

$$\gamma \in \beta \in \alpha \implies \beta \notin \gamma$$

En effet, par la transitivité, si $\beta \in \gamma$ et $\gamma \in \beta$ alors $\beta \in \beta$, qui contredit l'irréflexivité. Remarquons aussi que l'asymétrie implique l'irréflexivité. En effet, supposons l'asymétrie. Soit $\beta \in \alpha$. Supposons $\beta \in \beta$. Par l'asymétrie, $\beta \notin \beta$, contradiction.

Si nous préférons manipuler des relations d'ordre large, et pas strict, nous pouvons introduire la relation $\subseteq$ définie comme suit. Pour tous ensembles E et F , $E \subseteq F$ si $E \in F$ ou $E = F$. Avec cette nouvelle relation, un ensemble α est un ordinal si et seulement si c'est un ensemble transitif bien ordonné par $\subseteq$.

Notation. Nous noterons ON la classe des ordinaux. Nous verrons plus loin que cette classe n'est pas un ensemble.

Commençons par quelques propriétés importantes et faciles à prouver des ordinaux.

1.2 Propriétés faciles

Proposition 9.1. Soit $\alpha \in ON$. Alors, $\alpha \notin \alpha$.

Démonstration. Supposons $\alpha \in \alpha$. Par l'irréflexivité de $\in$ sur l'ensemble α , $\alpha \notin \alpha$. $\square$

Proposition 9.2. *Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Soit $\beta \in \alpha$.

Par la transitivité de $\in$ sur α , on a pour tout ensemble δ ,

$$\delta \in \gamma \in \beta \implies \delta \in \beta$$

Ainsi, β est transitif.

Comme α est transitif, $\beta \subseteq \alpha$. La restriction du bon ordre strict $\in$ sur α à l'ensemble β est alors aussi un bon ordre strict. Ainsi, $\beta \in \text{ON}$. $\square$

Proposition 9.3. *Une intersection d'ordinaux est un ordinal.*

Démonstration. Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'ordinaux. Soit $\alpha = \bigcap_{i \in I} \alpha_i$.

- α est une intersection d'ensembles transitifs, donc α est transitif.
- Soit $i \in I$. La restriction du bon ordre strict $\in$ sur α_i à l'ensemble α est encore un bon ordre strict.

$\square$

Proposition 9.4. *Soient α et β deux ordinaux. On a $\alpha \in \beta$ si et seulement si $\alpha \subsetneq \beta$.*

Démonstration. Supposons $\alpha \in \beta$. Par la transitivité de β , $\alpha \subseteq \beta$. De plus, $\alpha \neq \beta$ car sinon on aurait $\beta \in \beta$.

Supposons maintenant $\alpha \subsetneq \beta$. L'ensemble $\beta \setminus \alpha$ est une partie non vide de β , il contient donc un plus petit élément γ . Montrons que $\gamma = \alpha$. Soit $\delta \in \beta$.

Supposons que $\delta \notin \alpha$, c'est à dire $\delta \in \beta \setminus \alpha$. On a par définition de γ , $\gamma = \delta$ ou $\gamma \in \delta$. De là, $\delta \notin \gamma$. Ainsi, $\gamma \subseteq \alpha$.

Supposons que $\delta \in \alpha$. Comme $\gamma = \min(\beta \setminus \alpha) \notin \alpha$, on a $\delta \neq \gamma$. De même, $\gamma \notin \delta$, sinon, par la transitivité de α , $\gamma \in \delta \in \alpha$ entraînerait $\gamma \in \alpha$.

Remarquons maintenant que comme $\alpha \subsetneq \beta$, on a $\delta \in \beta$. On a aussi $\gamma \in \beta$. La relation $\in$ étant un ordre total sur β , on a donc $\delta \in \gamma$, puisque $\delta = \gamma$ ou $\gamma \in \delta$ sont impossibles. Ainsi, $\alpha \subseteq \gamma$. En résumé, $\alpha = \gamma$ et $\gamma \in \beta$, donc $\alpha \in \beta$. $\square$

Corollaire 9.5. *Soient α et β deux ordinaux. On a $\alpha \subseteq \beta$ si et seulement si $\alpha \in \beta$.*

1.3 Ordre total

La proposition suivante est remarquable. Tous les ordinaux sont comparables *via* la relation d'appartenance (ou d'inclusion, nous avons vu que c'est la même chose).

Proposition 9.6. *Soient α et β deux ordinaux. Alors on est dans un et un seul des trois cas suivants.*

- $\alpha \in \beta$
- $\alpha = \beta$
- $\beta \in \alpha$

Si l'on préfère, $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$.

Démonstration. Montrons d'abord l'exclusion des cas. Si $\alpha \in \beta$ et $\alpha = \beta$, alors $\beta \in \beta$ ce qui est impossible. De même, les deux derniers cas s'excluent mutuellement. Enfin, si $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \alpha$ alors, par la transitivité de α , $\alpha \in \alpha$, ce qui est à nouveau une contradiction.

Montrons maintenant que l'on est dans l'un des trois cas. Soit $\gamma = \alpha \cap \beta$. γ est une intersection d'ordinaux, c'est donc aussi un ordinal. Comme $\gamma \subseteq \alpha$, on a par la proposition précédente $\gamma = \alpha$ ou $\gamma \in \alpha$. De même, $\gamma = \beta$ ou $\gamma \in \beta$.

Supposons un instant que $\gamma \in \alpha$ et $\gamma \in \beta$. Alors $\gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$, contradiction. Ainsi, $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$. De là, $\alpha \subseteq \beta$ ou $\beta \subseteq \alpha$ et donc, comme α et β sont des ordinaux, $\alpha \in \beta$, $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$. $\square$

1.4 Réunions d'ordinaux

Nous avons déjà vu que toute intersection d'ordinaux est encore un ordinal. En fait, c'est également le cas pour les réunions d'ordinaux.

Proposition 9.7. *Toute réunion d'ordinaux est un ordinal.*

Démonstration. Soit $(\alpha_i)_{i \in I}$ une famille d'ordinaux. Soit $\alpha = \bigcup_{i \in I} \alpha_i$.

- α est une réunion d'ensembles transitifs, donc α est transitif.
- Soit $\beta \in \alpha$. Il existe $i \in I$ tel que $\beta \in \alpha_i$. Par l'irréflexivité de $\in$ sur α_i , $\beta \notin \beta$.
- Soient $\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha$. Soit $i \in I$ tel que $\beta \in \alpha_i$. On a $\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha_i$ donc $\delta \in \beta$ par la transitivité de $\in$ sur α_i .
- Soit A une partie non vide de α . Soit $\beta \in A$. Soit $i \in I$ tel que $\beta \in \alpha_i$. L'ensemble $A \cap \alpha_i$ est une partie non vide de α_i , elle possède donc un plus petit élément γ . Soit $\delta \in A$. Supposons un instant que $\delta \in \gamma$. Alors $\delta \in \gamma \in \alpha_i$, donc $\delta \in A \cap \alpha_i$ ce qui contredit la minimalité de γ . Par la proposition 6, on a donc $\delta = \gamma$ ou $\gamma \in \delta$. Ainsi, γ est le plus petit élément de A .

$\square$

2 Ordinaux successeurs, ordinaux limites

2.1 Successeur d'un ordinal

Proposition 9.8. *Le successeur d'un ordinal est un ordinal.*

Démonstration. Soit α un ordinal.

- Comme α est transitif, α^+ l'est aussi.
- Soit $\beta \in \alpha^+$. Si $\beta \in \alpha$, alors $\beta \notin \beta$. Si $\beta = \alpha$, alors $\beta \notin \beta$.
- Soient $\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha^+$. Si $\delta \in \gamma \in \beta \in \alpha$, alors $\delta \in \beta$ par la transitivité de $\in$ sur α . Si l'un des trois ordinaux δ, γ, β est égal à α , ce ne peut être que β . Par exemple, si $\gamma = \alpha$, on a alors $\alpha \in \beta \in \alpha$ donc, par la transitivité de α , $\alpha \in \alpha$, contradiction. Supposons donc $\delta \in \gamma \in \beta = \alpha$. Par la transitivité de α , $\delta \in \alpha$.
- Soit A une partie non vide de α^+ . Si $A \subseteq \alpha$, alors comme $\in$ est un bon ordre sur α , A a un plus petit élément. Si, au contraire, $\alpha \in A$, deux cas se présentent. Si $A = \{\alpha\}$, A a un plus petit élément qui est α . Sinon, $A \setminus \{\alpha\}$ est une partie non vide de A qui a un plus petit élément β . Comme $\beta \in \alpha$, β est aussi le plus petit élément de A .

□

La proposition suivante est évidente mais elle mérite d'être citée.

Proposition 9.9. *Soient α et β deux ordinaux. On suppose $\alpha \in \beta$. Alors, $\alpha^+ \subseteq \beta$.*

Démonstration. Soit $\gamma \in \alpha^+$. Si $\gamma \in \alpha$, alors $\gamma \in \beta$ par la transitivité de β . Si, au contraire, $\gamma = \alpha$, alors $\gamma \in \beta$. Ainsi, $\alpha^+ \subseteq \beta$. Comme α^+ est un ordinal, on en déduit que $\alpha^+ \in \beta$ ou $\alpha^+ = \beta$. □

Certains ordinaux sont le successeur d'un autre ordinal et, comme nous le verrons bientôt, d'autre pas. Cela justifie la définition suivante.

Définition 9.2. Soit α un ordinal. S'il existe un ordinal β tel que $\alpha = \beta^+$, α est un ordinal *successeur*. Sinon, c'est un ordinal *limite*.

Proposition 9.10. *Soit $\alpha \in ON$.*

- Si α est un ordinal limite, alors

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha$$

- Si $\alpha = \gamma^+$ est un ordinal successeur, alors

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \beta = \gamma$$

Démonstration.

- Supposons que α est un ordinal limite. Pour tout $\beta \in \alpha$, on a $\beta \subsetneq \alpha$. De là,

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \alpha$$

Inversement, soit $\gamma \in \alpha$. On a alors $\gamma^+ \subseteq \alpha$, mais comme α est limite, on a même $\gamma^+ \in \alpha$. De là,

$$\gamma \in \gamma^+ \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

Ainsi,

$$\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

- Supposons que $\alpha = \gamma^+$ est un ordinal successeur. Pour tout ordinal $\beta \in \alpha$, on a $\beta \subseteq \gamma$, et donc $\beta \subseteq \gamma$. De là,

$$\bigcup_{\beta \in \alpha} \beta \subseteq \gamma$$

Inversement, comme $\gamma \in \alpha$, on a

$$\gamma \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} \beta$$

□

2.2 Les ordinaux finis

Clairement, $\mathbf{0} = \emptyset$ est un ordinal. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les ensembles $\bar{n}$ sont aussi des ordinaux. Remarquons que

$$\bar{0} \in \bar{1} \in \bar{2} \in \bar{3} \dots$$

Définition 9.3. Un ordinal α est *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha = \bar{n}$. Sinon, il est *infini*.

Dorénavant, nous confondrons les entiers naturels et les ordinaux finis. Ainsi, nous écrirons n au lieu de $\bar{n}$.

Les ordinaux finis non nuls sont tous des ordinaux successeurs. En effet, si $n \in \omega \setminus \{0\}$, alors $n = (n-1)^+$.

Existe-t-il des ordinaux infinis? Oui, bien entendu. Rappelons que ω est l'ensemble des ordinaux finis.

Proposition 9.11. ω est le plus petit ordinal infini.

Démonstration. Soit

$$\omega' = \bigcup_{n \in \omega} n$$

ω' est une réunion d'ordinaux. C'est donc un ordinal. Montrons que $\omega' = \omega$. Soit $n \in \omega$. Alors, $n \in n^+$ donc $n \in \omega'$. Inversement, soit $\alpha \in \omega'$. Il existe donc $n \in \omega$ tel que $\alpha \in n$. Mais

$$n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

donc $\alpha \in \omega$.

Ainsi, ω est un ordinal. On a donc $\omega \notin \omega$, et ainsi ω est infini puisque ω est précisément l'ensemble des ordinaux finis.

Soit α un ordinal infini. On a donc $\alpha \notin \omega$. De là, $\omega \subseteq \alpha$. ω est donc le plus petit ordinal infini. $\square$

Proposition 9.12. ω est un ordinal limite.

Démonstration. Supposons qu'il existe un ordinal α tel que $\omega = \alpha^+$. On a $\alpha \in \omega$, donc α est un ordinal fini. Il en est donc de même pour $\alpha^+ = \omega$, contradiction. $\square$

3 La classe des ordinaux

3.1 Un bon ordre sur ON

La classe ON des ordinaux possède toutes les propriétés des ordinaux ...sauf une.

Proposition 9.13.

- Pour tout $\alpha \in \text{ON}$, $\alpha \subseteq \alpha$.
- Pour tous $\alpha, \beta \in \text{ON}$, si $\alpha \subseteq \beta$ et $\beta \subseteq \alpha$, alors $\alpha = \beta$.
- Pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \text{ON}$, si $\alpha \subseteq \beta$ et $\beta \subseteq \gamma$, alors $\alpha \subseteq \gamma$.
- Toute sous-classe non vide de ON possède un plus petit élément pour la relation $\subseteq$.

Démonstration.

- Le premier point est évident.
- Supposons $\alpha \subseteq \beta$ et $\beta \subseteq \alpha$. Par la proposition 6 on ne peut pas avoir à la fois $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \alpha$. Donc, $\alpha = \beta$.
- Supposons $\alpha \subseteq \beta$ et $\beta \subseteq \gamma$. Si l'une des deux inégalités est une égalité, la conclusion est évidente. Supposons donc $\alpha \in \beta$ et $\beta \in \gamma$. Par transitivité de γ , $\alpha \in \gamma$.
- Soit C une sous-classe non vide de ON. Soit $\alpha \in C$. Considérons l'ensemble

$$A = \{\beta \in C : \beta \in \alpha\}$$

Si $A = \emptyset$, on a alors pour tout $\beta \in C$, $\alpha = \beta$ ou $\alpha \in \beta$. Ainsi, $\alpha = \min C$.

Si $A \neq \emptyset$, A est une partie non vide de l'ordinal α , qui possède donc un plus petit élément γ . Pour tout $\beta \in C$, si $\beta \in A$ alors $\gamma = \beta$ ou $\gamma \in \beta$. Si $\beta \notin A$, alors $\gamma \in \alpha = \beta$ ou $\gamma \in \alpha \in \beta$, et dnc $\gamma \in \beta$. Ainsi, $\gamma = \min C$.

□

Ainsi, ON possède les propriétés caractéristiques des ordinaux. Sauf une...

3.2 ON est une classe propre

Proposition 9.14. *ON est une classe propre.*

Démonstration. Supposons que ON soit un ensemble. Alors, ON est un ordinal, donc $ON \in ON$, contradiction. □

Proposition 9.15. *Soit E un ensemble d'ordinaux. Alors, $\alpha = \bigcup E$ est un ordinal. En fait, α est la borne supérieure de E dans la classe ON.*

Démonstration. Remarquons tout de suite que comme les éléments d'un ordinal sont des ordinaux, α est un ensemble d'ordinaux. Ainsi, toute partie non vide de α possède un plus petit élément. De plus, l'irréflexivité et la transitivité de $\in$ sont vérifiées dans α .

Enfin, en tant que réunion d'ensembles transitifs, α est transitif.

Soit $\beta \in E$. On a $\beta \subseteq \alpha$ et donc, puisqu'il s'agit d'ordinaux, $\beta \subseteq \alpha$. Ainsi, α majore E .

Enfin, donnons-nous un majorant γ de E . Pour tout $\beta \in E$, $\beta \subseteq \gamma$ et donc $\beta \subseteq \gamma$. De là,

$$\alpha = \bigcup_{\beta \in E} \beta \subseteq \gamma$$

d'où $\alpha \subseteq \gamma$. □

3.3 Types de bon ordre

Les ordinaux sont des ensembles bien ordonnés très très particuliers. Pourtant, il s'avère qu'ils possèdent une certaine propriété d'universalité. C'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 9.16. *Soit A un ensemble bien ordonné. Alors il existe un unique $\alpha \in ON$ tel que $A \longleftrightarrow \alpha$.*

Démonstration. L'unicité est claire, car si deux ordinaux sont isomorphes alors ils sont égaux.

Pour montrer l'existence, supposons que tout ordinal α est isomorphe à un segment initial de A . Un tel segment initial est alors unique. De plus, deux ordinaux distincts ne sont pas isomorphes au même segment initial. On définit ainsi une bijection f de ON vers l'ensemble des segments initiaux de A qui sont

isomorphes à un ordinal. C'est impossible, parce que la classe propre ON serait alors l'image par l'application f^{-1} d'un ensemble, et serait donc un ensemble par le schéma d'axiomes de remplacement.

Ainsi, il existe un ordinal α tel que α ne soit pas isomorphe à un segment initial de A . On en déduit que $\alpha \longleftrightarrow A$, ou alors $A \longleftrightarrow \alpha[\beta]$ où $\beta \in \alpha$. En tant qu'élément d'un ordinal, β est un ordinal et de plus $\alpha[\beta] = \beta$. Ainsi, $A \longleftrightarrow \beta$. $\square$

Définition 9.4. Soit A un ensemble bien ordonné. L'unique ordinal α tel que $A \longleftrightarrow \alpha$ est le *type de bon ordre* de A .

4 Nouvelles notations

Étant donnés deux ordinaux α et β , nous noterons $\alpha < \beta$ lorsque $\alpha \in \beta$. On a donc

$$\alpha < \beta \iff \alpha \in \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$$

Nous noterons $\alpha \leq \beta$ lorsque $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$. On a donc

$$\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$$

Avec ces nouvelles notations, nous avons donc le résultat suivant.

Proposition 9.17. $(\text{ON}, \leq)$ est une classe propre bien ordonnée dont les segments initiaux sont des ensembles.

Démonstration. Les seul point à vérifier est le fait que les segments initiaux de ON sont des ensembles. Si $\alpha \in \text{ON}$,

$$\text{ON}[\alpha] = \{\beta \in \text{ON} : \beta < \alpha\} = \{\beta \in \text{ON} : \beta \in \alpha\} = \alpha$$

et α est effectivement un ensemble. $\square$

Nous avons vu dans le chapitre sur les bons ordres qu'une telle classe était unique à isomorphisme près. Nous tenons donc là la substance même de la classe des ordinaux.

Troisième partie

Compléments

Chapitre 10

Ensembles bien fondés

1 Introduction

1.1 Notion d'ensemble bien fondé

Définition 10.1. On définit par récursion sur l'ordinal α l'ensemble V_α .

- $V_0 = \emptyset$.
- Pour tout ordinal α ,

$$V_{\alpha+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$$

- Pour tout ordinal limite α ,

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$$

On note

$$V = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} V_\alpha$$

Les éléments de la classe V sont appelés les *ensembles bien fondés*.

1.2 Transitivité

Proposition 10.1. *Pour tout $\alpha \in \text{ON}$, V_α est transitif.*

Démonstration. Montrons la propriété par induction sur α .

- V_0 est un ensemble transitif.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons V_α transitif. Pour tout ensemble transitif E , $\mathcal{P}(E)$ est transitif, donc $V_{\alpha+}$ est transitif.
- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout ordinal $\beta < \alpha$, V_β est transitif. Une réunion d'ensembles transitifs est encore un ensemble transitif, donc V_α est transitif.

□

Proposition 10.2. *La classe V est transitive.*

Démonstration. V est une réunion d'ensembles transitifs. □

La proposition ci-dessous est évidente, mais elle sera d'un usage constant dans la suite du chapitre.

Proposition 10.3. *Soit $\alpha \in \text{ON}$. Soit x un ensemble. On a*

$$x \in V_{\alpha+} \iff x \subseteq V_\alpha$$

Démonstration. En effet, $V_{\alpha+} = \mathcal{P}(V_\alpha)$. □

Proposition 10.4. *Pour tout ordinal α , $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+}$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Soit $x \in V_\alpha$. Comme V_α est transitif, on a donc $x \subseteq V_\alpha$, d'où $x \in V_{\alpha+}$. Ainsi, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+}$. $\square$

1.3 Croissance

Proposition 10.5. *Pour tous ordinaux α et β ,*

$$\beta \leq \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$$

Démonstration. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , pour tout ordinal β , $\beta \leq \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$.

- C'est trivialement vrai si $\alpha = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que pour tout ordinal β , $\beta \leq \alpha \implies V_\beta \subseteq V_\alpha$. Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons $\beta \leq \alpha^+$. Si $\beta = \alpha^+$, la propriété est évidente. Si $\beta \leq \alpha$ alors, par l'hypothèse d'induction, $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Par la proposition précédente, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+}$, donc $V_\beta \subseteq V_{\alpha+}$.
- Soit α un ordinal limite. Comme $V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} V_\beta$, on a pour tout ordinal $\beta < \alpha$, $V_\beta \subseteq V_\alpha$. De plus, bien évidemment, $V_\alpha \subseteq V_\alpha$.

$\square$

Proposition 10.6. *Soit $x \in V$. Soit $y \subseteq x$. Alors $y \in V$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$ tel que $x \in V_\alpha$.

- Si $\alpha = 0$, alors la conclusion est immédiate.
- Si $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur, alors $x \in \mathcal{P}(V_\beta)$, donc $x \subseteq V_\beta$, donc $y \subseteq V_\beta$ et donc $y \in V_{\beta+} = V_\alpha$.
- Supposons enfin que α est un ordinal limite. Soit $\beta < \alpha$ tel que $x \in V_\beta$. Comme $V_\beta \subseteq V_{\beta+}$, on a aussi $x \in V_{\beta+}$. On est donc ramenés au cas précédent.

$\square$

Proposition 10.7. *Soit x un ensemble. Alors*

$$x \in V \iff x \subseteq V$$

Démonstration. $(\implies)$ C'est la transitivité de V .

$(\impliedby)$ Supposons $x \subseteq V$. Pour tout $y \in x$, on a donc $y \in V$. Notons α_y le plus petit ordinal α tel que $y \in V_\alpha$. La classe

$$C = \{\alpha_y : y \in x\}$$

est un ensemble d'ordinaux. Cet ensemble est donc majoré par un ordinal α . Pour tout $y \in x$, on a alors $y \in V_{\alpha_y} \subseteq V_\alpha$. De là, $x \subseteq V_\alpha$, et donc $x \in V_{\alpha^+}$. Finalement, $x \in V$. $\square$

Ce résultat est essentiel, nous l'utiliserons très souvent, surtout dans le sens de la réciproque. Pour montrer qu'un ensemble x est bien fondé, il suffit de montrer que ses éléments sont bien fondés.

1.4 Les ordinaux de Von Neumann sont bien fondés

Proposition 10.8. $ON \subseteq V$.

Démonstration. Montrons par induction sur α que pour tout ordinal α , $\alpha \in V$. Soit $\alpha \in ON$. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $\beta \in V$. Alors,

$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} \subseteq V$$

Par la proposition précédente, $\alpha \in V$. $\square$

Corollaire 10.9. V est une classe propre.

Démonstration. En effet, V contient la classe propre ON . $\square$

1.5 Croissance stricte

Proposition 10.10. Pour tout ordinal α , $V_\alpha \not\subseteq V_\alpha$.

Démonstration. Montrons ce résultat par induction sur α .

- On $V_0 = \emptyset \not\subseteq V_0$.
- Soit $\alpha \in ON$. Supposons que $V_\alpha \not\subseteq V_\alpha$. Supposons que $V_{\alpha^+} \in V_{\alpha^+}$. On a donc $V_{\alpha^+} \subseteq V_\alpha$. Or, $V_\alpha \subseteq V_{\alpha^+}$, donc $V_\alpha \in V_{\alpha^+}$, donc $V_\alpha \in V_\alpha$, contradiction. Ainsi, $V_{\alpha^+} \not\subseteq V_{\alpha^+}$.
- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $V_\beta \not\subseteq V_\beta$. Supposons que $V_\alpha \in V_\alpha$. Il existe donc $\beta < \alpha$ tel que $V_\alpha \in V_\beta$. Comme V_β est transitif, on a donc $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Remarquons maintenant que $V_\beta \in V_{\beta^+}$. Comme α est un ordinal limite, on a $\beta^+ < \alpha$ et donc $V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$. Ainsi, $V_\beta \in V_\alpha$. De $V_\alpha \subseteq V_\beta$, il vient alors $V_\beta \in V_\beta$, contradiction. Ainsi, $V_\alpha \not\subseteq V_\alpha$.

$\square$

Proposition 10.11. Pour tous ordinaux α et β ,

$$\beta < \alpha \implies V_\beta \subsetneq V_\alpha$$

Démonstration. Soient $\alpha, \beta \in ON$. On a $V_\beta \subseteq V_{\beta^+}$. De plus, $V_\beta \not\subseteq V_\beta$, alors que $V_\beta \in V_{\beta^+}$. On a donc en fait $V_\beta \subsetneq V_{\beta^+}$.

Supposons $\beta < \alpha$. On a donc $\beta^+ \leq \alpha$. Ainsi,

$$V_\beta \subsetneq V_{\beta^+} \subseteq V_\alpha$$

d'où le résultat. $\square$

2 Rang d'un ensemble bien fondé

2.1 Notion de rang

Proposition 10.12. *Soit $x \in V$. Il existe un unique ordinal α tel que $x \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$.*

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient α et β deux tels ordinaux. Supposons $\alpha \neq \beta$. Par exemple, $\alpha < \beta$, donc $\alpha^+ \leq \beta$. On a alors $V_{\alpha^+} \subseteq V_\beta$. Or, $x \in V_{\alpha^+}$, donc $x \in V_\beta$, contradiction.

Montrons maintenant l'existence. Soit

$$\beta = \min\{\alpha \in \text{ON} : x \in V_\alpha\}$$

Supposons un instant que β est un ordinal limite. On a alors

$$x \in V_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} V_\alpha$$

De là, il existe $\alpha < \beta$ tel que $x \in V_\alpha$, ce qui contredit la minimalité de β . Comme $V_0 = \emptyset$, on n'a pas non plus $\beta = 0$. Ainsi, $\beta = \alpha^+$ est un ordinal successeur. On a donc $x \in V_{\alpha^+}$ et comme $\alpha < \alpha^+$, $x \notin V_\alpha$. $\square$

Définition 10.2. Soit $x \in V$. Le *rang* de x est l'unique ordinal α tel que $x \in V_{\alpha^+} \setminus V_\alpha$.

On note $\rho(x)$ le rang de x .

Remarquons que, comme $V_1 = \{\emptyset\}$, $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x = \emptyset$.

Proposition 10.13. *Soit $x \in V$. Soit $\alpha \in \text{ON}$.*

- Si $\alpha \leq \rho(x)$ alors $x \notin V_\alpha$.
- Si $\alpha > \rho(x)$ alors $x \in V_\alpha$.

Démonstration.

- Supposons $\alpha \leq \rho(x)$. On a $V_\alpha \subseteq V_{\rho(x)}$ et $x \notin V_{\rho(x)}$. Donc $x \notin V_\alpha$.
- Supposons $\alpha > \rho(x)$, et donc $\rho(x)^+ \leq \alpha$. On a $V_{\rho(x)^+} \subseteq V_\alpha$ et $x \in V_{\rho(x)^+}$. Donc $x \in V_\alpha$.

$\square$

Corollaire 10.14. *Soit $x \in V$. On a*

$$\rho(x)^+ = \min\{\alpha \in \text{ON} : x \in V_\alpha\}$$

Proposition 10.15. *Pour tout ordinal α ,*

$$V_\alpha = \{x \in V : \rho(x) < \alpha\}$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Soit $x \in V_\alpha$. Si $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur alors, par minimalité de $\rho(x)$, $\rho(x) \leq \beta$ et donc $\rho(x) < \alpha$. Si α est un ordinal limite alors, par définition de V_α , il existe $\beta < \alpha$ tel que $x \in V_\beta$. On a aussi $x \in V_{\beta^+}$ donc $\rho(x) \leq \beta < \alpha$.

Inversement, soit $x \in V$ tel que $\rho(x) < \alpha$. On a $x \in V_{\rho(x)^+}$. Or, $\rho(x)^+ \leq \alpha$ donc $V_{\rho(x)^+} \subseteq V_\alpha$. Ainsi, $x \in V_\alpha$. $\square$

Proposition 10.16. *Soient $x, y \in V$. Si $y \in x$ alors $\rho(y) < \rho(x)$.*

Démonstration. Notons $\alpha = \rho(x)$. On a $x \in V_{\alpha^+}$, c'est à dire $x \subseteq V_\alpha$. De là, $y \in V_\alpha$ et donc $\rho(y) < \alpha$. Ainsi, $\rho(y) < \rho(x)$. $\square$

Corollaire 10.17. *Soit $x \in V$. Alors, $x \not\in x$.*

Démonstration. En effet, $\rho(x) \not\prec \rho(x)$. $\square$

Proposition 10.18. *Soit $x \in V$. Alors*

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : y \in x\}$$

Démonstration. Si $x = \emptyset$, la propriété est évidente. Supposons donc $x \neq \emptyset$. Notons

$$E = \{\rho(y) + 1 : y \in x\}$$

Soit $\alpha = \sup E$. Notons $\beta = \rho(x)$. Remarquons que $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$.

Pour tout $y \in x$, $\rho(y) < \rho(x) = \beta$, donc $\rho(y) + 1 \leq \beta$. Ainsi, β majore E , donc $\alpha \leq \beta$.

Montrons maintenant que $\alpha \geq \beta$. Pour cela, discutons selon que β est un ordinal successeur ou un ordinal limite.

- Cas 1, $\beta = \gamma^+$ est un ordinal successeur. On a $x \notin V_\beta$, c'est à dire $x \not\subseteq V_\gamma$. Il existe donc $y \in x$ tel que $y \notin V_\gamma$, c'est à dire $\rho(y) \geq \gamma$. De là,

$$\alpha \geq \rho(y) + 1 \geq \gamma^+ = \beta$$

- Cas 2, β est un ordinal limite. On a $x \notin V_\beta$, c'est à dire que pour tout $\gamma < \beta$, $x \notin V_\gamma$. Comme β est un ordinal limite, pour tout $\gamma < \beta$ on a aussi $\gamma^+ < \beta$ et donc $x \notin V_{\gamma^+}$, c'est à dire $x \notin V_\gamma$. Il existe donc $y \in x$ tel que $\rho(y) \geq \gamma$, et donc $\alpha \geq \rho(y) + 1 > \gamma$. De là,

$$\alpha \geq \sup\{\gamma \in \text{ON} : \gamma < \beta\} = \beta$$

□

2.2 Rang d'un successeur

Proposition 10.19. *Soit $x \in V$. Alors, $x^+ \in V$ et*

$$\rho(x^+) = \rho(x)^+$$

Démonstration. On a $x \in V$, donc $x \subseteq V$. De plus, $\{x\} \subseteq V$, donc $x^+ = x \cup \{x\} \subseteq V$, d'où $x^+ \in V$. Les éléments de x^+ sont les éléments de x , ainsi que x . On a donc

$$\begin{aligned} \rho(x^+) &= \sup\{\rho(y) + 1 : y \in x^+\} \\ &= \max(\sup\{\rho(y) + 1 : y \in x\}, \rho(x) + 1) \\ &= \max(\rho(x), \rho(x) + 1) \\ &= \rho(x) + 1 \end{aligned}$$

□

2.3 Rang d'un ordinal

Proposition 10.20. *Pour tout $\alpha \in \text{ON}$, $\alpha \in V$ et*

$$\rho(\alpha) = \alpha$$

Démonstration. Nous avons déjà vu que $\text{ON} \subseteq V$. Montrons l'égalité par induction sur α . Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, $\rho(\beta) = \beta$. On a

$$\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\}$$

Par l'hypothèse d'induction,

$$\begin{aligned} \rho(\alpha) &= \sup\{\rho(\beta) + 1 : \beta < \alpha\} \\ &= \sup\{\beta + 1 : \beta < \alpha\} \\ &= \alpha \end{aligned}$$

La dernière égalité se vérifie facilement en considérant le cas où α est successeur et celui où α est un ordinal limite. □

2.4 Rang d'un ensemble de parties

Proposition 10.21. *Pour tout $x \in V$, $\mathcal{P}(x) \in V$ et*

$$\rho(\mathcal{P}(x)) = \rho(x) + 1$$

Démonstration. Soit $x \in V$. Notons $\alpha = \rho(x)$. Soit $y \in \mathcal{P}(x)$. On a $y \subseteq x \subseteq V_\alpha$. De là, $y \in V_{\alpha+}$ (et aussi $\rho(y) \leq \alpha$). On en déduit que $\mathcal{P}(x) \subseteq V$, et donc que $\mathcal{P}(x) \in V$. De plus,

$$\rho(\mathcal{P}(x)) = \sup\{\rho(y) + 1 : y \in \mathcal{P}(x)\} \leq \alpha + 1$$

Enfin, $x \in \mathcal{P}(x)$, donc

$$\alpha + 1 = \rho(x) + 1 \leq \rho(\mathcal{P}(x))$$

□

2.5 Le rang de V_α

Proposition 10.22. *Pour tout ordinal α , $V_\alpha \in V$ et*

$$\rho(V_\alpha) = \alpha$$

Démonstration. L'appartenance de V_α à V résulte de la définition de V . On a $V_\alpha \subseteq V_\alpha$, donc $V_\alpha \in V_{\alpha+}$. De plus, $V_\alpha \notin V_\alpha$, d'où le résultat. □

2.6 Rang d'une réunion

Proposition 10.23. *Pour tout $x \in V$, $\bigcup x \in V$ et*

$$\rho\left(\bigcup x\right) \leq \rho(x)$$

Démonstration. On a $x \in V$ donc $x \subseteq V$. Ainsi, pour tout $y \in x$, $y \in V$, donc $y \subseteq V$. De là, pour tout $y \in x$, pour tout $z \in y$, $z \in V$ et donc $\bigcup x \subseteq V$, d'où $\bigcup x \in V$.

Soit $z \in \bigcup x$. Il existe $y \in x$ tel que $z \in y$. On a $\rho(z) + 1 \leq \rho(y)$ et $\rho(y) + 1 \leq \rho(x)$, donc $\rho(z) + 2 \leq \rho(x)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \rho\left(\bigcup x\right) &= \sup\{\rho(z) + 1 : z \in \bigcup x\} \\ &\leq \sup\{\rho(z) + 2 : z \in \bigcup x\} \\ &\leq \rho(x) \end{aligned}$$

□

Peut-on faire mieux qu'une inégalité ? Oui.

Proposition 10.24. *Soit $x \in V$.*

- Si $\rho(x) = 0$, alors $\rho(\bigcup x) = 0$.
- Si $\rho(x) = \alpha^+$ est un ordinal successeur, alors $\rho(\bigcup x) = \alpha$.
- Si $\rho(x)$ est un ordinal limite, alors $\rho(\bigcup x) = \rho(x)$.

Démonstration.

- Si $\rho(x) = 0$ alors $x = \emptyset$, et $\bigcup \emptyset = \emptyset$.
- Supposons que $\rho(x) = \alpha^+$ est un ordinal successeur. Soit $z \in \bigcup x$. Il existe $y \in x$ tel que $z \in y$. De là, $\rho(z) + 1 \leq \rho(y)$. De plus, $\rho(y) + 1 \leq \rho(x) = \alpha + 1$, donc $\rho(y) \leq \alpha$. Ainsi,

$$\rho\left(\bigcup x\right) = \sup \left\{ \rho(z) + 1 : z \in \bigcup x \right\} \leq \alpha$$

Comme $\rho(x) = \alpha^+$ est un ordinal successeur, il existe $y \in x$ tel que $\rho(y) = \alpha$. De là, pour tout $\beta < \alpha$, il existe $z \in y$ tel que $\rho(z) + 1 > \beta$, et donc $\rho(\bigcup x) > \beta$. L'ordinal β ne majore donc pas l'ensemble $\{\rho(z) + 1 : z \in \bigcup x\}$. D'où la conclusion.

- Supposons que $\rho(x)$ est un ordinal limite. Nous avons vu dans la proposition précédente que $\rho(\bigcup x) \leq \rho(x)$. Soit $\alpha < \rho(x)$. Comme $\rho(x)$ est un ordinal limite, on a aussi $\alpha + 1 < \rho(x)$. Il existe donc $y \in x$ tel que $\rho(y) + 1 > \alpha + 1$, et donc $\rho(y) > \alpha$. De là, il existe $z \in y$ tel que $\rho(z) + 1 > \alpha$. L'ordinal α ne majore donc pas l'ensemble $\{\rho(z) + 1 : z \in \bigcup x\}$. D'où la conclusion.

□

Exemples.

- On a $\rho(\omega) = \omega$, qui est un ordinal limite. On a aussi $\bigcup \omega = \omega$, et effectivement $\rho(\bigcup \omega) = \rho(\omega)$.
- On a $3 = \{0, 1, 2\}$ et $\bigcup 3 = 0 \cup 1 \cup 2 = 2$. Ainsi, $\rho(3) = 3$ mais $\rho(\bigcup 3) = 2$.

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que pour tout ordinal α , $\rho(V_\alpha) = \alpha$. Que vaut $\bigcup V_\alpha$? Clairement, par la proposition précédente, une discussion selon que α est un ordinal successeur ou un ordinal limite s'impose. On a en fait le résultat suivant.

Proposition 10.25. *Soit $\alpha \in ON$.*

- Si $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur, alors

$$\bigcup V_\alpha = V_\beta$$

- Si α est un ordinal limite, alors

$$\bigcup V_\alpha = V_\alpha$$

Démonstration.

- Supposons que $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur. Soit $z \in \bigcup V_\alpha$. Il existe $y \in V_\alpha$ tel que $z \in y$. Comme $y \in V_\alpha = V_{\beta^+}$, on a $y \subseteq V_\beta$, et donc $z \in V_\beta$. Ainsi,

$$\bigcup V_\alpha \subseteq V_\beta$$

Inversement, soit $z \in V_\beta$. Soit $y = \{z\}$. On a $z \in y$. Or, $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta^+} = V_\alpha$. Ainsi, $z \in \bigcup V_\alpha$, et donc

$$V_\beta \subseteq \bigcup V_\alpha$$

- Supposons que α est un ordinal limite. Soit $z \in \bigcup V_\alpha$. Il existe $y \in V_\alpha$ tel que $z \in y$. Par la transitivité de V_α , comme $y \in V_\alpha$, on a aussi $y \subseteq V_\alpha$, et donc $z \in V_\alpha$. Ainsi,

$$\bigcup V_\alpha \subseteq V_\alpha$$

Inversement, soit $z \in V_\alpha$. Comme α est un ordinal limite, il existe $\beta < \alpha$ tel que $z \in V_\beta$. Soit $y = \{z\}$. On a $z \in y$. Or, $y \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta^+}$. Mais α est un ordinal limite, donc $\beta^+ < \alpha$ et donc $y \in V_\alpha$. Ainsi, $z \in \bigcup V_\alpha$, et donc

$$V_\alpha \subseteq \bigcup V_\alpha$$

□

Nous retrouvons bien les résultats de la proposition 24. Si $\alpha = \beta^+$ est un ordinal successeur,

$$\rho(\bigcup V_\alpha) = \rho(V_\beta) = \beta$$

Si, au contraire, α est un ordinal limite, alors

$$\rho(\bigcup V_\alpha) = \rho(V_\alpha) = \alpha$$

3 V et la théorie des ensembles

Nous allons dans cette dernière section explorer un par un tous les axiomes de la théorie des ensembles. Nous allons voir que la classe V les vérifie tous, puis nous explorerons les conséquences de ce résultat.

Nous allons décrire ces axiomes de façon « naïve », sans entrer dans des détails qui demanderaient au lecteur des connaissances trop approfondies, en logique en particulier.

3.1 L'axiome d'extensionnalité

L'axiome d'extensionnalité est au coeur de l'idée intuitive que l'on se fait d'un ensemble : un ensemble est *caractérisé* par ses éléments.

Proposition 10.26. Soient $x, y \in V$. Alors,

$$(\forall z \in V, z \in x \iff z \in y) \implies x = y$$

Démonstration. Supposons que pour tout $z \in V$, $z \in x \iff z \in y$. Soit $z \in x$. Comme $x \in V$ on a aussi $x \subseteq V$. Ainsi, $z \in V$ et donc, par l'hypothèse, $z \in y$. Ainsi, $x \subseteq y$. De même, $y \subseteq x$. $\square$

3.2 Le schéma d'axiomes de compréhension

Proposition 10.27. Soit φ une formule. Soit $x \in V$. Alors, il existe $y \in V$ tel que

$$\forall z \in V, z \in y \iff (z \in x \wedge \varphi(z))$$

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$y = \{z \in x : \varphi(z)\}$$

On a $y \subseteq x$ et $x \in V$, donc $y \in V$. L'ensemble y répond clairement à la question. $\square$

3.3 L'axiome de la paire

Proposition 10.28. Soient $x, y \in V$. Alors, il existe $z \in V$ tel que $x \in z$ et $y \in z$.

Démonstration. Prenons évidemment $z = \{x, y\}$. On a $z \subseteq V$, donc $z \in V$. $\square$

Remarquons au passage que

$$\rho(\{x, y\}) = \max(\rho(x) + 1, \rho(y) + 1) = \max(\rho(x), \rho(y)) + 1$$

3.4 L'axiome de la réunion

Proposition 10.29. Soit $x \in V$. Alors, $\bigcup x \in V$.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé ce résultat. $\square$

3.5 L'axiome des parties

Proposition 10.30. Soit $x \in V$. Alors, $\mathcal{P}(x) \in V$.

Démonstration. Nous avons aussi déjà prouvé ce résultat. $\square$

3.6 Le schéma d'axiomes de remplacement

Commençons par une définition.

Définition 10.3. Soit $\varphi(x, y)$ une formule logique qui dépend des paramètres $x, y \in V$ (et peut-être aussi d'autres paramètres). La formule φ est *fonctionnelle* en y si pour tous $x, x', y \in V$,

$$\varphi(x, y) \wedge \varphi(x', y) \implies x = x'$$

Proposition 10.31. Soit $E \in V$. Soit $\varphi(x, y)$ une formule fonctionnelle en y . Il existe alors $F \in V$ tel que pour tous $x, y \in V$,

$$x \in E \wedge \varphi(x, y) \implies y \in F$$

Démonstration. Considérons

$$F = \{y \in V : \exists x \in E, \varphi(x, y)\}$$

Par le schéma d'axiomes de remplacement classique, F est un ensemble. De plus, $F \subseteq V$, donc $F \in V$. Clairement, F répond à la question. $\square$

3.7 L'axiome du choix

Il existe plusieurs façons équivalentes d'énoncer l'axiome du choix. Nous en choisissons une qui ne demande aucune définition préliminaire.

Proposition 10.32. Soit $E \in V$. On suppose les éléments de E non vides et disjoints deux à deux. Alors il existe $F \in V$ tel que pour tout $x \in E$, $F \cap x$ est un singleton.

Démonstration. Par l'axiome du choix standard, il existe une tel ensemble $G \in \mathcal{U}$ tel que pour tout $x \in E$, $G \cap x = \{g_x\}$ est un singleton. Remarquons que $g_x \in x$ et donc, puisque $x \in V$, $g_x \in V$.

Posons $F = G \cap V$. Comme $F \subseteq G$, F est un ensemble. De plus, $F \subseteq V$, donc $F \in V$. Soit $x \in E$. On a

$$F \cap x = (G \cap V) \cap x = (G \cap x) \cap V = \{g_x\} \cap V = \{g_x\}$$

Ainsi, $F \cap x$ est un singleton. $\square$

3.8 L'axiome de fondation

Pour tous les axiomes dont nous avons déjà parlé, nous avons montré que l'axiome était un théorème dans l'univers V en utilisant l'axiome correspondant dans l'univers $\mathcal{U}$.

Pour l'axiome de fondation, nous allons faire mieux que cela. Nous allons prouver qu'il est un théorème dans l'univers V , sans utiliser l'axiome de fondation dans l'univers $\mathcal{U}$.

Proposition 10.33. *Soit $x \in V$. On suppose $x \neq \emptyset$. Alors, il existe $y \in x$ tel que pour tout $z \in x$, $z \notin y$.*

Di autrement, tout élément x de V possède un élément minimal pour la relation d'appartenance.

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$E = \{\rho(y) : y \in x\}$$

L'ensemble non vide d'ordinaux E possède un plus petit élément α . Soit $y \in x$ tel que $\rho(y) = \alpha$. Soit $z \in x$. On a $\rho(z) \geq \alpha$, donc $z \notin y$. $\square$

3.9 L'axiome de l'infini

Proposition 10.34. *Il existe $x \in V$ vérifiant :*

- $\emptyset \in x$.
- Pour tout $y \in x$, $y^+ \in x$.

Démonstration. Il suffit de prendre $x = \omega$. $\square$

3.10 Conclusion

Nous venons de voir que la classe V vérifie tous les axiomes de la théorie des ensembles. Nous avons même montré que V vérifie l'axiome de fondation, sans utiliser l'axiome de fondation dans $\mathcal{U}$.

Quelles sont les conséquences de ce résultat ? Eh bien, cela veut dire qu'il nous est tout à fait possible de rajouter à ZFC l'axiome

$$\mathcal{U} = V$$

En réalité, nous connaissons déjà cet axiome. Commençons par un lemme.

Lemme 10.35. *On suppose qu'il existe pas une suite d'ensembles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$. Alors, l'axiome de fondation n'est pas vérifié par l'univers $\mathcal{U}$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble

$$x = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Supposons un instant que x a un élément minimal pour la relation d'appartenance. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $y \in x$, $y \notin x_n$. C'est absurde, puisque $x_{n+1} \in x$ et $x_{n+1} \in x_n$. $\square$

Proposition 10.36. *L'axiome $\mathcal{U} = V$ est équivalent à l'axiome de fondation.*

Démonstration. ($\Rightarrow$) Supposons que $\mathcal{U} = V$. Nous avons prouvé l'axiome de fondation dans V , il est donc vérifié dans $\mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\mathcal{U} \neq V$. Construisons par récurrence forte sur n une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $x_0, \dots, x_{n-1}$ vérifiant

- Pour tout $k < n$, $x_k \notin V$.
- $x_{n-1} \in \dots \in x_0$.

Comme $x_{n-1} \notin V$, on a $x_{n-1} \not\subseteq V$. Il existe donc un ensemble $y \in x_{n-1}$ tel que $y \notin V$. On choisit un tel ensemble y et on l'appelle x_n (remarquons ici l'utilisation de l'axiome du choix, et plus précisément de *l'axiome du choix dénombrable*).

Nous avons donc construit une suite d'ensembles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \in x_n$. Ainsi, l'axiome de fondation n'est pas vérifié dans $\mathcal{U}$. $\square$

Remarque. L'axiome de fondation n'est jamais utilisé dans les mathématiques du quotidien. Tous les ensembles utilisés dans les mathématiques usuelles ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, les ensembles de fonctions, etc.) sont bien fondés. Rajouter à la liste des axiomes de la théorie des ensembles l'axiome $\mathcal{U} = V$ n'a donc pas d'impact sur les mathématiques usuelles. En revanche, les services qu'il rend en théorie des ensembles sont importants. Cet axiome permet de construire l'univers des ensembles comme une *hiérarchie*. Il nous dit qu'en partant du seul ensemble vide, et en effectuant des opérations du type « ensemble des parties » ou « réunion », on peut construire *la totalité de l'univers*.

Chapitre 11

Relations bien fondées

1 Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons parlé de classes bien ordonnées. Nous allons voir ici que, en fin de compte, ce qui importe n'est pas que la classe soit ordonnée. Le concept important est qu'elle soit « bien ». Ceci va nous amener à parler du concept de classe *bien fondée*.

1.1 Notion de relation bien fondée

Définition 11.1. Soit $<$ une relation binaire sur une classe C . Pour tout $x \in C$, l'*extension* de x est

$$\text{ext}_{<}(x) = \{y \in C : y < x\}$$

Le nom « extension » vient du cas particulier suivant. Si $C = \mathcal{U}$ est l'univers de tous les ensembles, on a pour tout $x \in \mathcal{U}$,

$$\text{ext}_{\in}(x) = \{y \in \mathcal{U} : y \in x\} = x$$

Prenons garde au fait que, malgré la notation $<$, les relations que nous considérerons ne sont pas des relations d'ordre. Cela dit, nous allons voir qu'elles vérifient obligatoirement certaines de leurs propriétés (mais pas toutes).

Définition 11.2. Soit $<$ une relation binaire sur une classe C . La relation $<$ est de *type ensemble* si pour tout $x \in C$, $\text{ext}_{<}(x)$ est un ensemble.

Par exemple, la relation $<$ est de type ensemble sur $\mathcal{U}$, puisque pour tout $x \in \mathcal{U}$, $\text{ext}_{\in}(x) = x$.

Si la classe C est un ensemble, la relation $<$ est automatiquement de type ensemble. En revanche, si C est une classe propre, le fait que $<$ soit de type ensemble est indispensable pour pouvoir effectuer certaines opérations. Par exemple, comme nous le verrons lorsque nous aborderons le théorème de récursion, cela permet de considérer des ensemble du genre $F(\text{ext}_{<}(x))$, où $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ est une fonction.

Définition 11.3. Une *classe bien fondée* est un couple $(C, <)$ où C est une classe et $<$ est une relation binaire sur C vérifiant

- $<$ est de type ensemble.
- Toute sous-classe D non vide de C possède un élément minimal :

$$\exists x \in D, \forall y \in D, y \not< x$$

Nous abuserons parfois en parlant d'une classe C bien fondée pour une relation $<$, ou d'une relation $<$ bien fondée dans une classe C .

1.2 Exemples

Toute classe bien ordonnée est bien fondée. Par exemple, pour tout ordinal α , l'ensemble $(\alpha, \in)$ est bien fondé.

La classe $(\mathbb{ON}, \in)$ est également bien fondée.

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, *l'axiome de fondation* affirme que la classe $(\mathcal{U}, \in)$ est bien fondée.

1.3 Premières propriétés

Proposition 11.1. *Soit $(C, <)$ une classe bien fondée.*

- *La relation $<$ est irréflexive : pour tout $x \in C$,*

$$x \not< x$$

- *La relation $<$ est asymétrique : pour tous $x, y \in C$,*

$$x < y \implies y \not< x$$

- *La relation $<$ est acyclique : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas d'éléments $x_0, \dots, x_n$ de C tels que*

$$x_0 < x_n < \dots < x_1 < x_0$$

Démonstration.

- Soit $x \in C$. Soit $D = \{x\}$. D est une sous-classe non vide de C , elle possède donc un élément minimal, qui ne peut être que x . De là, comme $x \in D$, $x \not< x$.
- Soient $x, y \in C$. Supposons $x < y$. Soit $D = \{x, y\}$. La sous-classe non vide D de C a un élément minimal. Ce ne peut pas être y , puisque $x < y$ et $x \in D$. C'est donc x . De là, comme $y \in D$, $y \not< x$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n \in C$. Considérons la classe

$$D = \{x_0, \dots, x_n\}$$

Cette sous-classe non vide de C a un élément minimal x_i , où $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $i \neq n$, alors $x_{i+1} \not< x_i$. Et si $i = n$, alors $x_0 \not< x_n$. On n'a donc pas $x_0 < x_n < \dots < x_1 < x_0$.

□

Proposition 11.2. *Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} < x_n$.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C . Considérons la classe

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

D est une sous-classe non vide de C . Elle possède donc un élément minimal. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que x_n soit un élément minimal de D . Comme $x_{n+1} \in D$, on a donc $x_{n+1} \not< x_n$. $\square$

Cette proposition possède une réciproque.

Proposition 11.3. *Soit C une classe. Soit $<$ une relation binaire sur C de type ensemble pour laquelle il n'existe pas de suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} < x_n$. Alors, $(C, <)$ est bien fondée.*

Démonstration. Montrons la contraposée. Supposons que $(C, <)$ n'est pas bien fondée. Il existe donc $D \subseteq C$ telle que pour tout $x \in D$, il existe $y \in D$ tel que $y < x$. Choisissons $x_0 \in x$. On construit alors par récurrence sur n une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de C comme suit. Prenons $x_0 \in D$. Puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $x_{n+1} \in D$ tel que $x_{n+1} < x_n$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de C qui vérifie la négation de l'hypothèse.

Remarquons que pour prouver ce résultat, nous avons utilisé l'axiome du choix dénombrable. $\square$

1.4 Classes transitives

Définition 11.4. Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Une sous-classe D de C est *transitive* si pour tout $x \in D$, pour tout $y \in C$,

$$y < x \implies y \in D$$

Dit autrement, pour tout $x \in D$, $\text{ext}_{<}(x) \subseteq D$.

Par exemple, $\emptyset$ et C sont la plus petite et la plus grande sous-classe transitive de C .

Considérons la classe $(\mathcal{U}, \in)$. Soit a un ensemble. La sous-classe a de $\mathcal{U}$ est transitive si et seulement si pour tout $x \in a$, pour tout ensemble y ,

$$y \in x \implies y \in a$$

Dit autrement, a est transitif si et seulement si pour tout $x \in a$, $x \subseteq a$. Pas d'ambiguïté, donc, avec le concept d'ensemble transitif dont nous avons parlé dans un chapitre précédent. Ces deux notions coïncident.

Proposition 11.4. *Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. L'intersection et la réunion de sous-classes transitives de C est une sous-classe transitive de C .*

Démonstration. Soit $(D_i)_{i \in I}$ une famille de sous-classes transitives de C . Soit

$$D = \bigcup_{i \in I} D_i$$

Soit $x \in D$. Soit $y \in C$. Supposons $y < x$. Comme $x \in D$, il existe $i \in I$ tel que $x \in D_i$. La classe D_i est transitive, donc $y \in D_i$. Ainsi, $y \in D$.

La preuve pour l'intersection est identique. $\square$

Proposition 11.5. *Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Soit $D \subseteq C$. Il existe une plus petite sous-classe transitive de C qui contient D .*

Démonstration. La version courte de la preuve consiste à considérer l'intersection des sous-classes transitives de C qui contiennent D . Donnons une démonstration plus constructive.

Posons $E_0 = D$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E_{n+1} = \{y \in C : \exists x \in E_n, y < x\}$$

Posons enfin $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$.

- Clairement, $D = E_0 \subseteq E$.
- Soit $x \in E$. Soit $y \in C$ tel que $y < x$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in E_n$. De là, $y \in E_{n+1}$ donc $y \in E$. Ainsi, E est une sous-classe transitive de C .
- Soit F une sous-classe transitive de C telle que $D \subseteq F$. Montrons que $E \subseteq F$. Pour cela, montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq F$. On a $E_0 = D \subseteq F$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $E_n \subseteq F$. Soit $y \in E_{n+1}$. Il existe $x \in E_n$ tel que $y < x$. Par l'hypothèse de récurrence, $x \in F$. Comme F est transitive, on a donc $y \in F$. Ainsi, $E_{n+1} \subseteq F$.

$\square$

2 Induction et récursion

2.1 Le principe d'induction

Proposition 11.6. [PRINCIPE D'INDUCTION]

Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Soit $\varphi(x)$ une formule. On suppose que pour tout $x \in C$,

$$(\forall y \in \text{ext}_{<}(x), \varphi(y)) \implies \varphi(x)$$

Alors, $\forall x \in C, \varphi(x)$.

Démonstration. Considérons la classe

$$D = \{x \in C : \neg \varphi(x)\}$$

Supposons D non vide. Alors, D possède un élément minimal x . Pour tout $y < x$, on a $y \notin D$, et donc $\varphi(y)$. Par l'hypothèse de la proposition, on a donc $\varphi(x)$, contradiction. $\square$

2.2 Classes compatibles de fonctions

Pour toute fonction f , nous notons $\text{dom } f$ le *domaine* de f , c'est à dire son ensemble de départ. Nous notons également $\text{ran } f$ son *image*.

$$\text{ran } f = \{f(x) : x \in \text{dom } f\}$$

Nous parlerons de la *Fonction* f avec un F majuscule lorsque le domaine de f est une classe éventuellement propre. Si C et D sont deux classes, une Fonction $f : C \longrightarrow D$ est donc une classe de couples (x, y) où $x \in C$, $y \in D$ vérifiant

$$\forall x \in C, \exists! y \in D, (x, y) \in f$$

Nous réservons le mot « fonction » avec un f minuscule au cas où le domaine de f est un ensemble. Remarquons que, par le schéma d'axiomes de remplacement, si $\text{dom } f$ est un ensemble, alors $\text{ran } f$ est aussi un ensemble et f elle-même est un ensemble.

Définition 11.5. Une classe de fonctions T est *compatible* si pour toutes fonctions $g_1, g_2 \in T$, pour tout $x \in \text{dom } g_1 \cap \text{dom } g_2$, $g_1(x) = g_2(x)$.

Proposition 11.7. Soit T une classe compatible de fonctions. Alors $\bigcup T$ est une Fonction.

Démonstration. Soit $f = \bigcup T$. On a

$$f = \{(x, g(x)) : g \in T, x \in \text{dom } g\}$$

Tout d'abord,

$$D = \text{dom } f = \bigcup_{g \in T} \text{dom } g$$

Soit $x \in D$. Supposons que (x, y_1) et (x, y_2) appartiennent à f . Il existe donc $g_1, g_2 \in T$ telles que $x \in \text{dom } g_1 \cap \text{dom } g_2$, $y_1 = g_1(x)$ et $y_2 = g_2(x)$. Comme T est compatible, on a $y_1 = y_2$. Ainsi, f est une Fonction. $\square$

2.3 Le théorème de récursion

Proposition 11.8. [THÉORÈME DE RÉCURSION]

Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Soit $G : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$. Alors, il existe une unique Fonction $f : C \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que pour tout $x \in C$,

$$f(x) = G(f|_{\text{ext}_{<}(x)})$$

Démonstration. Montrons tout d'abord l'existence. Soit T la classe des fonctions $g : D \subseteq C \longrightarrow \mathcal{U}$ où D est un ensemble transitif, qui vérifient

$$\forall x \in D, g(x) = G(g|_{\text{ext}_{<}(x)})$$

Soient $g_1 : D_1 \longrightarrow \mathcal{U}$ et $g_2 : D_2 \longrightarrow \mathcal{U}$ deux éléments de T . Posons

$$E = \{x \in D_1 \cap D_2 : g_1(x) \neq g_2(x)\}$$

Supposons, par l'absurde, que $E \neq \emptyset$. Soit x un élément minimal de E . Pour tout $y \in C$, si $y < x$, alors $y \in D_1$, $y \in D_2$ et $g_1(y) = g_2(y)$. De là,

$$g_1(x) = G(g_1|_{\text{ext}_{<}(x)}) = G(g_2|_{\text{ext}_{<}(x)}) = g_2(x)$$

Contradiction. Ainsi, deux fonctions de T coïncident sur l'intersection de leurs domaines. T est donc une classe compatible de fonctions. De là, $f = \bigcup T$ est une Fonction.

Le domaine D de f est la réunion des domaines des fonctions $g \in T$. En tant que réunion d'ensembles transitifs, D est donc une classe transitive.

Soit $x \in D$. Il existe $g \in T$ telle que $x \in \text{dom } g$. Par transitivité de $\text{dom } g$, on a alors pour tout $y \in \text{ext}_{<}(x)$, $y \in \text{dom } g$ et $f(y) = g(y)$. De là, $g|_{\text{ext}_{<}(x)} = f|_{\text{ext}_{<}(x)}$, d'où

$$f(x) = g(x) = G(g|_{\text{ext}_{<}(x)}) = G(f|_{\text{ext}_{<}(x)})$$

Il reste à montrer que $D = C$. Supposons le contraire. Soit a un élément minimal de $C \setminus D$. Par la minimalité de a , pour tout $y < a$, $y \in D$. Ainsi, $\text{ext}_{<}(a) \subseteq D$ et $D' = D \cup \{a\}$ est une sous-classe transitive de C . Définissons $g : D' \rightarrow \mathcal{U}$ en posant $g(x) = f(x)$ si $x \neq a$ et $g(a) = G(f|_{\text{ext}_{<}(a)})$. Clairement, $g \in T$, donc $g \subseteq f$, donc $a \in D$, contradiction.

Pour l'unicité, considérons la classe

$$T = \{f : C \rightarrow \mathcal{U} : \forall x \in C, f(x) = G(f|_{\text{ext}_{<}(x)})\}$$

Soient $f_1, f_2 \in T$. Supposons $f_1 \neq f_2$. Soit

$$D = \{x \in C : f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

Soit x un élément minimal de D . On a alors pour tout $y < x$, $f_1(y) = f_2(y)$. De là,

$$f_1(x) = G(f_1|_{\text{ext}_{<}(x)}) = G(f_2|_{\text{ext}_{<}(x)}) = f_2(x)$$

Contradiction. Ainsi, $f_1 = f_2$. $\square$

3 Le lemme de contraction de Mostowski

3.1 Un morphisme de C vers $\mathcal{U}$

Proposition 11.9. *Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. Il existe une unique Fonction $f : C \rightarrow \mathcal{U}$ telle que pour tout $x \in C$,*

$$f(x) = \{f(y) : y \in C, y < x\}$$

La classe $T = \text{ran } f$ est transitive et bien fondée pour la relation $\in$.

Remarquons que cette fonction f vérifie

$$\forall x, y \in C, y < x \implies f(y) \in f(x)$$

La Fonction f est donc un morphisme de $(C, <)$ vers $(\mathcal{U}, \in)$.

Démonstration. Pour l'existence et l'unicité de f , il suffit d'appliquer le théorème de récursion à la fonction $G : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ définie par $G(g) = \text{ran } g$ si g est une fonction, et $G(g) = \emptyset$ sinon.

Montrons que $(T, \in)$ est transitive. Soit $t \in T$. Il existe donc $x \in C$ tel que $t = f(x)$. Soit $s \in t$. Il existe donc $y < x$ tel que $s = f(y)$. Ainsi, $s \in T$.

La relation $\in$ est de type ensemble sur T . En effet, pour tout $x \in T$,

$$\{y \in T : y \in x\} = T \cap x$$

est une partie de l'ensemble x , c'est donc un ensemble.

Montrons enfin que toute sous-classe non vide de T possède un élément minimal pour la relation d'appartenance. Supposons le contraire. Il existe alors $S \subseteq T$ telle que pour tout $t \in S$, il existe $s \in S$ vérifiant $s \in t$. Posons

$$B = f^{-1}(S)$$

La classe B est non vide. Soit $x \in B$. On a $f(x) \in S$, donc il existe $s \in S$ tel que $s \in f(x)$. De là, il existe $y < x$ tel que $s = f(y)$. Remarquons que comme $s \in S$, $y \in f^{-1}(S) = B$.

Ainsi, pour tout $x \in B$, il existe $y \in B$ tel que $y < x$. La sous-classe B de C ne possède donc pas d'élément minimal pour la relation $<$, contradiction puisque $(C, <)$ est bien fondée. $\square$

3.2 Relations extensionnelles

Définition 11.6. Soit $<$ une relation binaire sur une classe C . La relation $<$ est *extensionnelle* si pour tous $x, y \in C$,

$$\text{ext}_{<}(x) = \text{ext}_{<}(y) \implies x = y$$

Dit autrement, pour tous $x, y \in C$,

$$(\forall z \in C, z < x \iff z < y) \implies x = y$$

Par exemple, $(\mathcal{U}, \in)$ est une classe extensionnelle : c'est exactement le sens de l'axiome d'extensionnalité.

Proposition 11.10.

- La Fonction f de la proposition 9 est injective si et seulement si $<$ est extensionnelle sur C .
- Si f est injective, f est un isomorphisme entre $(C, <)$ et $(\text{ran } f, \in)$.

Démonstration.

$(\implies)$ Supposons que $<$ n'est pas extensionnelle sur C . Il existe donc $a, b \in C$ tels que $a \neq b$ et $\text{ext}_{<}(a) = \text{ext}_{<}(b)$. On a alors

$$f(a) = f(\text{ext}_{<}(a)) = f(\text{ext}_{<}(b)) = f(b)$$

Ainsi, f n'est pas injective.

($\Leftarrow$) Supposons que $<$ est extensionnelle. Soit

$$X = \{x \in C : \exists y \in C, y \neq x, f(y) = f(x)\}$$

Supposons que f n'est pas injective. La classe X est donc non vide, elle possède ainsi un élément minimal a . Soit $b \neq a$ tel que $f(b) = f(a)$. Par l'extensionnalité de $<$, il existe $c \in C$ tel que $c < a$ et $c \not< b$, ou alors $c \not< a$ et $c < b$. Considérons le premier cas (le second cas est analogue).

Comme $c < a$, on a $f(c) \in f(a) = f(b)$. Il existe donc $d < b$ tel que $f(c) = f(d)$. On a $c \neq d$, puisque $c \not< b$. De là, $c \in X$. Contradiction, puisque $c < a$ et a est un élément minimal de X .

- Supposons que f est injective. Soient $a, b \in C$. Supposons $a < b$. Par définition de f , on a alors $f(a) \in f(b)$. Inversement, supposons que $f(a) \in f(b)$. Toujours par définition de f , il existe $x < b$ tel que $f(a) = f(x)$. Par l'injectivité de f , $a = x$ et donc $a < b$.

□

3.3 Le lemme de Mostowski

Corollaire 11.11. [LEMME DE CONTRACTION DE MOSTOWSKI]

Soit $(C, <)$ une classe bien fondée. On suppose $<$ extensionnelle sur C . Alors il existe un unique isomorphisme de $(C, <)$ sur $(T, \in)$ où T est une classe transitive bien fondée pour la relation d'appartenance.

Démonstration. Nous avons vu que la fonction $f : C \rightarrow \mathcal{U}$ définie pour tout $x \in C$ par

$$f(x) = \{f(y) : y \in C, y < x\}$$

est un isomorphisme de C sur $T = \text{ran } f$.

Prouvons l'unicité. Soit T une sous-classe transitive de $\mathcal{U}$ bien fondée pour la relation d'appartenance. Soit $g : C \rightarrow T$ un isomorphisme. Soit $x \in C$. On a pour tout $y \in C$,

$$y < x \iff g(y) \in g(x)$$

Ainsi,

$$g(x) = \{g(y) : y \in C, y < x\}$$

et donc $g = f$. □

4 Rang

Dans toute cette section, $(C, <)$ désigne une classe bien fondée.

4.1 Une hiérarchie de classes

Définition 11.7. On définit par récursion sur l'ordinal α la classe C_α .

- $C_0 = \emptyset$.
- Pour tout ordinal α ,

$$C_{\alpha+} = \{x \in C : \forall y < x, y \in C_\alpha\}$$

- Pour tout ordinal limite α ,

$$C_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} C_\beta$$

Remarquons que C_1 est la classe des éléments minimaux de C . La classe C_2 est la classe des éléments de C dont les seuls prédécesseurs sont des éléments minimaux, etc.

Notons

$$C' = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} C_\alpha$$

Nous verrons plus loin que $C' = C$.

Exemple. Prenons $C = \mathcal{U}$, muni de la relation $\in$. On a alors pour tout $\alpha \in \text{ON}$,

$$C_{\alpha+} = \{x \in \mathcal{U} : \forall y \in x, y \in C_\alpha\} = \mathcal{P}(C_\alpha)$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout ordinal α , $C_\alpha = V_\alpha$.

Proposition 11.12. *Pour tout ordinal α , C_α est transitive.*

Démonstration. Montrons la propriété par induction sur α .

- C'est évident pour C_0 .
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons que C_α est transitive. Soit $x \in C_{\alpha+}$. Soit $y < x$. On a donc $y \in C_\alpha$. Comme C_α est transitive, on a pour tout $z < y$, $z \in C_\alpha$. Ainsi, par définition de $C_{\alpha+}$, $y \in C_{\alpha+}$.
- Soit α un ordinal limite. Supposons que pour tout $\beta < \alpha$, C_β est transitive. La classe C_α , union d'un ensemble de classes transitives, est donc aussi transitive.

□

Proposition 11.13. *C' est transitive.*

Démonstration. C'est une réunion de classes transitives. □

Lemme 11.14. *Pour tout ordinal α , $C_\alpha \subseteq C_{\alpha+}$.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \text{ON}$. Soit $x \in C_\alpha$. Comme C_α est transitive, on a pour tout $y < x$, $y \in C_\alpha$. Ainsi, par définition de $C_{\alpha+}$, $x \in C_{\alpha+}$. □

4.2 Croissance

Proposition 11.15. *Pour tous ordinaux α et β ,*

$$\beta < \alpha \implies C_\beta \subseteq C_\alpha$$

Démonstration. Montrons par induction sur α que pour tout $\alpha \in \text{ON}$, pour tout $\beta \in \text{ON}$, $\beta \leq \alpha \implies C_\beta \subseteq C_\alpha$.

- C'est clair pour $\alpha = 0$.
- Soit $\alpha \in \text{ON}$. Supposons la propriété vraie pour l'ordinal α . Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons $\beta < \alpha^+$. On a donc $\beta \leq \alpha$. Par le lemme précédent et l'hypothèse d'induction,

$$C_\beta \subseteq C_\alpha \subseteq C_\alpha^+$$

- Soit α un ordinal limite. Comme $C_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} C_\beta$, on a pour tout ordinal $\beta < \alpha$, $C_\beta \subseteq C_\alpha$. Remarquons qu'ici nous n'avons pas besoin de l'hypothèse d'induction pour conclure.

□

On peut se demander si $\beta < \alpha \implies C_\beta \subsetneq C_\alpha$.

Proposition 11.16. *Soit $\alpha \in \text{ON}$. On suppose que $C_\alpha = C_{\alpha^+}$. Alors, pour tout $\beta > \alpha$, $C_\beta = C_\alpha$.*

Démonstration. Montrons par induction sur β que pour tout $\beta \in \text{ON}$,

$$\beta > \alpha \implies C_\beta = C_\alpha$$

- Si $\beta = 0$ la conclusion est immédiate puisque $0 > \alpha$ est impossible.
- Soit $\beta \in \text{ON}$. Supposons que $\beta > \alpha \implies C_\beta = C_\alpha$. Supposons $\beta^+ > \alpha$. On a donc $\beta^+ \geq \alpha^+$. Si $\beta^+ = \alpha^+$, alors évidemment $C_{\beta^+} = C_{\alpha^+} = C_\alpha$. Si $\beta^+ > \alpha^+$, alors $\beta > \alpha$ et donc, par l'hypothèse d'induction, $C_\beta = C_\alpha$. Tout d'abord, on a l'inclusion $C_\alpha \subseteq C_{\beta^+}$. Inversement, soit $x \in C_{\beta^+}$. Pour tout $y < x$, on a $y \in C_\beta = C_\alpha$. De là, $x \in C_{\alpha^+} = C_\alpha$. Ainsi, $C_{\beta^+} \subseteq C_\alpha$.
- Soit β un ordinal limite. Supposons que pour tout $\gamma < \beta$, $\gamma > \alpha \implies C_\gamma = C_\alpha$. Supposons $\beta > \alpha$. On a évidemment $C_\alpha \subseteq C_\beta$. Inversement, soit $x \in C_\beta$. Par définition de C_β , il existe $\delta < \beta$ tel que $x \in C_\delta$. Pour tout $\gamma \in \text{ON}$ tel que $\delta \leq \gamma < \beta$, on a aussi $x \in C_\gamma$. Comme $\alpha < \beta$, il existe un tel γ vérifiant de plus $\gamma > \alpha$. Par l'hypothèse d'induction, on a donc $x \in C_\alpha$. Ainsi, $C_\beta \subseteq C_\alpha$.

□

Pour résumer, la suite $(C_\alpha)_{\alpha \in \text{ON}}$ est initialement strictement croissante (au sens de l'inclusion). Si pour une valeur de α les classes C_α et C_{α^+} sont égales, alors elles sont toutes égales à partir du rang α . La suite est ainsi stationnaire.

Proposition 11.17. *Si la suite $(C_\alpha)_{\alpha \in \text{ON}}$ est strictement croissante, alors C est une classe propre.*

Démonstration. La preuve utilise l'axiome du choix et la notion de cardinal.

Supposons, par l'absurde, que C est un ensemble. Soit α un ordinal limite. Pour tout $\beta < \alpha$, soit $x_\beta \in C_{\beta+} \setminus C_\beta$. Les x_β sont distincts deux à deux. Ainsi, la fonction $f : \alpha \rightarrow C$ définie par $f(\beta) = x_\beta$ est injective. Il en résulte que pour tout cardinal α , $|C| \geq \alpha$. On obtient une contradiction en prenant pour α un cardinal strictement supérieur à $|C|$. $\square$

Remarquons que la suite $(C_\alpha)_{\alpha \in \text{ON}}$ peut être stationnaire même si C est une classe propre. Par exemple, si C est la classe des singletons de l'univers $\mathcal{U}$, munie de la relation $\in$, on a pour tout ordinal $\alpha \geq 1$, $C_\alpha = C$. Pourtant, C est une classe propre.

4.3 $C = C'$

Proposition 11.18. *Soit $x \in C$. Alors,*

$$x \in C' \iff \forall y < x, y \in C'$$

Démonstration. $(\Rightarrow)$ C'est la transitivité de C' .

$(\Leftarrow)$ Supposons que pour tout $y < x$, $y \in C'$. Notons α_y le plus petit ordinal α tel que $y \in C_\alpha$. Par le schéma d'axiomes de remplacement, la classe

$$E = \{\alpha_y : y \in \text{ext}_{<}(x)\}$$

est un ensemble d'ordinaux. Cet ensemble est donc majoré par un ordinal α . Pour tout $y < x$, on a ainsi

$$y \in C_{\alpha_y} \subseteq C_\alpha$$

De là, pour tout $y < x$, $y \in C_\alpha$ et donc $x \in C_{\alpha+}$. Finalement, $x \in C'$. $\square$

Proposition 11.19. $C = C'$.

Démonstration. Supposons le contraire. Prenons x minimal appartenant à $C \setminus C'$. On a donc pour tout $y < x$, $y \in C'$. Par la proposition précédente, $x \in C'$, contradiction. $\square$

Retenons donc que

$$C = \bigcup_{\alpha \in \text{ON}} C_\alpha$$

4.4 Rang

Proposition 11.20. *Soit $x \in C$. Il existe un unique ordinal α tel que $x \in C_{\alpha^+} \setminus C_\alpha$.*

Démonstration. Commençons par l'unicité. Soient α et β deux tels ordinaux. Supposons $\alpha \neq \beta$. Par exemple, $\alpha < \beta$ et donc $\alpha^+ \leq \beta$. On a alors $C_{\alpha^+} \subseteq C_\beta$. Mais $x \in C_{\alpha^+}$ et $x \notin C_\beta$, contradiction.

Prouvons maintenant l'existence. Soit

$$\beta = \min\{\alpha \in \text{ON} : x \in C_\alpha\}$$

Supposons un instant que β est un ordinal limite. On a alors

$$x \in C_\beta = \bigcup_{\gamma < \beta} C_\gamma$$

et donc il existe $\gamma < \beta$ tel que $x \in C_\gamma$, ce qui contredit la minimalité de β .

Comme $C_0 = \emptyset$, on n'a pas non plus $\beta = 0$. Ainsi, $\beta = \alpha^+$ est un ordinal successeur. On a donc $x \in C_{\alpha^+}$, et comme $\alpha < \alpha^+ = \beta$, $x \notin C_\alpha$. $\square$

Définition 11.8. Soit $x \in C$. Le *rang* de x est l'unique ordinal α tel que $x \in C_{\alpha^+} \setminus C_\alpha$.

On note $\rho(x)$ le rang de x .

L'ordinal $\rho(x)$ est donc caractérisé par

- $x \notin C_{\rho(x)}$.
- $x \in C_{\rho(x)^+}$.

Remarquons que $\rho(x) = 0$ si et seulement si $x \in C_1$, c'est à dire x est un élément minimal de C .

Proposition 11.21. *Soit $x \in C$. Soit $\alpha \in \text{ON}$.*

- Si $\alpha \leq \rho(x)$, alors $x \notin C_\alpha$.
- Si $\alpha > \rho(x)$, alors $x \in C_\alpha$.

Démonstration.

- Supposons $\alpha \leq \rho(x)$. On a $C_\alpha \subseteq C_{\rho(x)}$, et $x \notin C_{\rho(x)}$. Donc, $x \notin C_\alpha$.
- Supposons $\alpha > \rho(x)$, donc $\rho(x)^+ \leq \alpha$. On a $C_{\rho(x)^+} \subseteq C_\alpha$, et $x \in C_{\rho(x)^+}$. Donc, $x \in C_\alpha$.

$\square$

Corollaire 11.22. *Pour tout ordinal α ,*

$$C_\alpha = \{x \in C : \rho(x) < \alpha\}$$

Démonstration. C'est immédiat par la proposition précédente. $\square$

Proposition 11.23. *Soient $x, y \in C$. Si $y < x$, alors $\rho(y) < \rho(x)$.*

Démonstration. Notons $\alpha = \rho(x)$. On a $x \in C_{\alpha+}$, donc $y \in C_\alpha$, donc $\rho(y) < \alpha$. $\square$

4.5 Une formule pour le rang

Proposition 11.24. *Pour tout $x \in C$,*

$$\rho(x) = \sup\{\rho(y) + 1 : y < x\}$$

Démonstration. Notons

$$E = \{\rho(y) + 1 : y < x\}$$

E est un ensemble d'ordinaux, car la relation $<$ est de type ensemble. Soit $\alpha = \sup E$. Notons $\beta = \rho(x)$.

Pour tout $y < x$, $\rho(y) < \rho(x) = \beta$, donc $\rho(y) + 1 \leq \beta$. Ainsi, β majore E , donc $\alpha \leq \beta$.

Montrons maintenant que $\alpha \geq \beta$. Pour cela, discutons selon que β est nul, successeur ou limite.

- Cas 1, $\beta = 0$. Dans ce cas, x est minimal et donc $E = \emptyset$. De là, $\alpha = 0$.
- Cas 2, $\beta = \gamma^+$ est un ordinal successeur. On a $x \notin C_\beta$, c'est à dire qu'il existe $y < x$ tel que $y \notin C_\gamma$, et donc $\rho(y) \geq \gamma$. De là,

$$\alpha \geq \rho(y) + 1 \geq \gamma^+ = \beta$$

- Cas 3, β est un ordinal limite. On a $x \notin C_\beta$, c'est à dire que pour tout $\gamma < \beta$, $x \notin C_\gamma$. Comme β est un ordinal limite, pour tout $\gamma < \beta$ on a aussi $\gamma^+ < \beta$ et donc $x \notin C_{\gamma^+}$, c'est à dire qu'il existe $y < x$ tel que $\rho(y) \geq \gamma$. Ainsi, $\alpha \geq \rho(y) + 1 > \gamma$. De là,

$$\alpha \geq \sup\{\gamma \in \text{ON} : \gamma < \beta\} = \beta$$

$\square$

4.6 Le rang de C

Il peut être assez tentant de définir le rang de la classe C tout entière. Ceci est faisable à condition que la suite $(C_\alpha)_{\alpha \in \text{ON}}$ soit stationnaire.

Proposition 11.25. *On suppose la suite $(C_\alpha)_{\alpha \in \text{ON}}$ stationnaire. Soit α le plus petit ordinal tel que $C_\alpha = C_{\alpha+}$. Alors, pour tout $c \in C$, $\rho(c) < \alpha$.*

Démonstration. En effet, si $\beta \geq \alpha$ alors $C_{\beta+} \setminus C_\beta = \emptyset$, donc $x \notin C_{\beta+} \setminus C_\beta$.
 $\square$

Définition 11.9. Le rang $\rho(C)$ de la classe C est le plus petit ordinal α tel que $C_\alpha = C_{\alpha+}$.

Proposition 11.26. On a

$$\rho(C) = \sup\{\rho(x) + 1 : x \in C\}$$

Démonstration. Soit

$$E = \{\rho(x) + 1 : x \in C\}$$

Notons $\alpha = \rho(C)$. Par la proposition 25 on a pour tout $x \in C$, $\rho(x) < \alpha$, et donc $\rho(x) + 1 \leq \alpha$. Ainsi, α majore E .

Inversement, soit $\beta < \alpha$. On a, par définition de α , $C_\beta \subsetneq C_{\beta+}$. Soit $x \in C_{\beta+} \setminus C_\beta$. On a alors $\rho(x) = \beta$ et donc $\beta < \rho(x) + 1 \in E$. Ainsi, β ne majore pas E . L'ordinal α est donc le plus petit majorant de E . $\square$

Index

Index

- LIM, 70
- ON, 12, 115
- $\mathcal{U}$, 10
- ω , 18, 103
- ω_1 , 81
- adhérence, 45
- classe
 - bien fondée, 136
 - compatible de fonctions, 140
 - propre, 10
 - transitive, 138
- continuité, 47
- différence de deux ordinaux, 31
- division euclidienne, 38
- ensemble
 - bien fondé, 122
 - transitif, 102
- entier naturel, 16
- extension, 136
- fonction, 19
- forme normale de Cantor, 62, 63
- induction, 18, 139
- intervalle ouvert, 44
- intervalles d'ordinaux, 12
- isomorphisme d'ensembles ordonnés, 94
- lemme de Mostowski, 143
- limite
 - d'une fonction, 46
 - d'une suite, 49
- ordinal, 12
 - de Von Neumann, 110
 - dénombrable, 76
 - fini, 17, 114
 - infini, 17
- limite, 15, 113
 - successeur, 15, 113
 - transfini, 17
- ouvert de ON, 44
- paradoxe de Russell, 11
- points fixes
 - de l'addition, 41
 - de l'exponentielle, 65
 - de la multiplication, 60
- produit de deux ordinaux, 34
- puissance, 54
- rang
 - d'un ensemble bien fondé, 125
 - d'une classe bien fondée, 149
 - dans une classe bien fondée, 147
- relation de type ensemble, 136
- restriction, 20
- réursion, 20, 140
- segment initial, 92
- somme de deux ordinaux, 28
- successeur
 - d'un ensemble, 103
 - d'un ordinal, 14
- suite transfinie, 49
- théorème d'Archimède, 37
- théorème du logarithme, 60
- type de bon ordre, 117
- univers, 10
- voisinage d'un ordinal, 44