

ZFC

Ces deux pages ne peuvent être comprises que par un lecteur initié à la théorie des langages. Cela dit, ce document sera sans doute très décoratif pour illustrer une couverture de classeur ! $\aleph_1$ remerciements à Ernst Zermelo, Abraham Fraenkel et Georg Cantor pour leur si modeste contribution à la formalisation des mathématiques de l'ère moderne. Ce qui suit n'est certainement pas la fin de l'Histoire mais, pauvres mathématiciens de la préhistoire des mathématiques, il va pour l'instant falloir nous en contenter ...

Formules

Symboles : $\mathcal{D} = \{ (,) \}$ (délimiteurs), $\mathcal{Q} = \{ \exists, \forall \}$ (quantificateurs), $\mathcal{C}_1 = \{ \neg \}$ (connecteurs unaires), $\mathcal{C}_2 = \{ \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow \}$ (connecteurs binaires), $\mathcal{P}_2 = \{ =, \in \}$ (prédicats binaires), $\mathcal{V} = \{ v_0, v_1, v_2, \dots \}$ (variables).

Les ensembles ci-dessus sont supposés disjoints deux à deux.

Alphabet : $\mathcal{A} = \mathcal{D} \cup \mathcal{Q} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{V}$

Notation : On note $\mathcal{E}(x)$ pour exprimer que x appartient à $\mathcal{E}$.

Formule : L'ensemble $\mathcal{F}$ des formules est le plus petit ensemble de mots sur l'alphabet $\mathcal{A}$ vérifiant :

$$\begin{array}{llll} (F_1) & \mathcal{V}(x), \mathcal{P}_2(\square), \mathcal{V}(y) & \vdash & \mathcal{F}(x \square y) \\ (F_2) & \mathcal{C}_1(\square), \mathcal{F}(\varphi) & \vdash & \mathcal{F}(\square \varphi) \\ (F_3) & \mathcal{F}(\varphi), \mathcal{C}_2(\square), \mathcal{F}(\psi) & \vdash & \mathcal{F}((\varphi \square \psi)) \\ (F_4) & \mathcal{Q}(\square), \mathcal{V}(x), \mathcal{F}(\varphi) & \vdash & \mathcal{F}(\square x \varphi) \end{array}$$

Si l'on pose

- $\mathcal{F}_0 = \{ x \square y \mid \mathcal{V}(x), \mathcal{V}(y), \mathcal{C}_2(\square) \}$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1} = \mathcal{F}_n & \cup \{ \square \varphi \mid \mathcal{C}_1(\square), \mathcal{F}_n(\varphi) \} \\ & \cup \{ (\varphi \square \psi) \mid \mathcal{C}_2(\square), \mathcal{F}_n(\varphi), \mathcal{F}_n(\psi) \} \\ & \cup \{ \square x \varphi \mid \mathcal{Q}(\square), \mathcal{V}(x), \mathcal{F}_n(\varphi) \} \end{aligned}$$

on a alors

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$$

Abréviations :

$$\begin{aligned} x \notin y & \iff \neg x \in y \\ x \neq y & \iff \neg x = y \\ \forall x \in a \varphi & \iff \forall x (x \in a \rightarrow \varphi) \\ \exists x \in a \varphi & \iff \exists x (x \in a \wedge \varphi) \end{aligned}$$

Notation : Soient φ une formule et a une variable fixée. $\varphi(x)$ désigne la formule obtenue en remplaçant toutes les occurrences libres de a par la variable x (cette opération peut nécessiter de modifier certaines variables liées de φ pour éviter des phénomènes de capture).

Notation : $\exists! y \varphi(y) \iff (\exists y \varphi(y) \wedge \forall z \forall t (\varphi(z) \wedge \varphi(t) \rightarrow z = t))$.

Axiomes

Les axiomes de ZFC sont les formules $(A_1), \dots, (A_9)$ ci-dessous. $(A_3(\varphi))$ et $(A_6(\varphi))$ sont des schémas d'axiomes, ils permettent d'écrire un axiome pour chaque formule φ ne contenant pas d'occurrence libre d'une certaine variable. L'axiome (A_0) permet de constater que la théorie des ensembles n'est pas une théorie vide. C'est évidemment préférable.

(A_0) **Non vacuité** : $\exists x \ x = x$

(A_1) **Extensionnalité** : $\forall x \ \forall y \ (\forall z \ (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

(A_2) **Fondation** : $\forall x \ (\exists y \ y \in x \rightarrow \exists y \ (y \in x \wedge \neg \exists z \ (z \in x \wedge z \in y)))$

$(A_3(\varphi))$ **Compréhension**

Si φ est une formule ne contenant pas d'occurrence libre de la variable y ,

$$\forall v \ \exists y \ \forall x \ (x \in y \leftrightarrow (x \in v \wedge \varphi))$$

(A_4) **Paire** : $\forall x \ \forall y \ \exists z \ (x \in z \wedge y \in z)$

(A_5) **Union** : $\forall z \ \exists u \ \forall x \ \forall y \ ((x \in y \wedge y \in z) \rightarrow x \in u)$

$(A_6(\varphi))$ **Remplacement**

Si φ est une formule ne contenant pas d'occurrence libre de la variable b ,

$$\forall a \ (\forall x \ (x \in a \rightarrow \exists! y \ \varphi) \rightarrow \exists b \ \forall x \ (x \in a \rightarrow \exists y \ (y \in b \wedge \varphi)))$$

Définition : $x = \emptyset \iff \forall z \ (z \notin x)$

Définition : $y = S(x) \iff \forall z \ (z \in y \leftrightarrow z \in x \vee z = x)$

(A_7) **Infini** : $\exists x \ (\emptyset \in x \wedge \forall y \ (y \in x \rightarrow S(y) \in x))$

Définition : $x \subseteq y \iff \forall z \ (z \in x \rightarrow z \in y)$

(A_8) **Parties** : $\forall x \ \exists y \ \forall z \ (z \subseteq x \rightarrow z \in y)$

Définition : $y = v \cap w \iff \forall x \ (x \in y \leftrightarrow (x \in v \wedge x \in w))$

Définition : $\text{SNG}(x) \iff \exists y \ (y \in x \wedge \forall z \ (z \in x \rightarrow z = y))$

(A_9) **Choix**

$$\forall f \ ((\emptyset \notin f \wedge \forall x \in f \ \forall y \in f \ (x \neq y \rightarrow x \cap y = \emptyset)) \rightarrow \exists c \ \forall x \ (x \in f \rightarrow \text{SNG}(c \cap x)))$$
