

Une bijection explicite de HF sur $\mathbb{N}$

Marc Lorenzi

18 octobre 2021

1 Introduction

1.1 Ensembles héréditairement finis

Définition 1. Posons $R_0 = \emptyset$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_{n+1} = \mathcal{P}(R_n)$. Enfin, posons

$$HF = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n$$

Les ensembles appartenant à HF sont appelés les ensembles *héréditairement finis*.

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'entier $2^{<n>}$ en posant $2^{<0>} = 0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2^{<n+1>} = 2^{2^{<n>}}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est un ensemble fini, et une récurrence immédiate sur n montre que $|R_n| = 2^{<n>}$.

Proposition 1. Lorsque n tend vers l'infini, $2^{<n>}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Une récurrence facile montre que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $2^p \geq p+1$. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{<n>} \geq n$. C'est clair pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $2^{<n>} \geq n$. On a alors

$$2^{<n+1>} = 2^{2^{<n>}} \geq 2^n + 1 \geq n + 1$$

□

Évidemment, $2^{<n>}$ tend vers l'infini beaucoup plus vite que n . Par exemple, grâce à l'inégalité que nous venons de montrer, on a pour tout $n \geq 1$,

$$2^{<n>} = 2^{2^{<n-1>}} \geq 2^{n-1}$$

De là, pour tout $n \geq 2$,

$$2^{<n>} = 2^{2^{<n-1>}} \geq 2^{2^{n-2}}$$

etc.

Proposition 2. $|HF| = \aleph_0$.

Démonstration. L'ensemble HF est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc $|HF| \leq \aleph_0$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \subseteq HF$, donc

$$|R_n| = 2^{<n>} \leq |HF|$$

Ainsi, comme $2^{<n>}$ tend vers l'infini, HF est infini. $\square$

Proposition 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble R_n est transitif : pour tout $A \in R_n$, $A \subseteq R_n$.

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur n . C'est évident si $n = 0$ puisque $R_0 = \emptyset$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons R_n transitif. Soit $A \in R_{n+1}$. On a donc $A \subseteq R_n$, c'est à dire que pour tout $X \in A$, $X \in R_n$. R_n étant transitif, les éléments de A sont donc inclus dans R_n . Ils appartiennent donc à $\mathcal{P}(R_n) = R_{n+1}$. Ainsi, $A \subseteq R_{n+1}$. $\square$

Proposition 4. L'ensemble HF est transitif.

Démonstration. Soit $A \in HF$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \in R_n$. Comme R_n est transitif, on a donc $A \subseteq R_n \subseteq HF$. $\square$

Proposition 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n \subset R_{n+1}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $R_n \subseteq R_n$ donc $R_n \in R_{n+1}$. Puisque R_{n+1} est transitif, il en résulte que $R_n \subseteq R_{n+1}$. Remarquons que l'inclusion est stricte, car les ensembles R_n et R_{n+1} n'ont pas le même cardinal. $\square$

Proposition 6. Soit A un ensemble. Alors $A \in HF$ si et seulement si A est fini et $A \subseteq HF$.

Démonstration. Une récurrence immédiate sur n montre que les éléments de R_n sont des ensembles finis. Ainsi, pour tout $A \in HF$, A est fini.

Supposons que $A \in HF$. On a donc $A \in R_{n+1}$ où $n = \text{rg } A$. Ainsi, $A \in \mathcal{P}(R_n)$, donc $A \subseteq R_n \subseteq HF$.

Supposons maintenant que A est fini et $A \subseteq HF$. Pour tout $X \in A$, il existe un entier n_X tel que $X \in R_{n_X}$. Soit $n = \max\{n_X, X \in A\}$. Par la croissance de la suite (R_n) , on a pour tout $X \in A$, $X \in R_n$. De là $A \subseteq R_n$ et donc $A \in R_{n+1} \subseteq HF$. $\square$

1.2 Rang d'un ensemble

Définition 2. Soit $A \in HF$. Le rang de A est

$$\text{rg } A = \min\{n \in \mathbb{N}, A \in R_{n+1}\}$$

Par exemple, $\text{rg } \emptyset = 0$, $\text{rg } \{\emptyset\} = 1$.

Proposition 7. Soit $A \in HF \setminus \{\emptyset\}$. Alors

$$\text{rg } A = 1 + \max\{\text{rg } X, X \in A\}$$

Démonstration. Soit $n = \max\{\text{rg } X, X \in A\}$. Pour tout $X \in A$, on a $X \in R_{n+1}$ et donc $A \subseteq R_{n+1}$. De là, $A \in R_{n+2}$, donc $\text{rg } A \leq n+1$. Par ailleurs, il existe $X_0 \in A$ de rang n . On a donc $X_0 \notin R_n$. Donc, $A \not\subseteq R_n$, d'où $A \notin R_{n+1}$. Ainsi, $\text{rg } A \geq n+1$. $\square$

2 Une fonction de HF vers $\mathbb{N}$

2.1 Introduction

Nous allons considérer dans cet article la fonction $\varphi : HF \longrightarrow \mathbb{N}$ définie, pour tout $A \in HF$, par

$$\varphi(A) = \sum_{X \in A} 2^{\varphi(X)}$$

Cette fonction est bien définie. En effet,

- φ est bien définie sur R_0 puisque $R_0 = \emptyset$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons φ bien définie sur R_n . Soit $A \in R_{n+1}$. A est un ensemble fini et, de plus, pour tout $X \in A$, $X \in R_n$, donc $\varphi(A)$ est bien défini.

2.2 Bijectivité de φ

Proposition 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ est une bijection de R_n sur $\llbracket 0, 2^{<n>} - 1 \rrbracket$.

Démonstration. Montrons-le par récurrence sur n . Pour $n = 0$, c'est évident car les deux ensembles sont vides. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que φ est une bijection de R_n sur $\llbracket 0, 2^{<n>} - 1 \rrbracket$. Soit $A \in R_{n+1}$. Pour tout $X \in A$, $X \in R_n$. De là,

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \sum_{X \in A} 2^{\varphi(X)} \\ &\leq \sum_{X \in R_n} 2^{\varphi(X)} \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, lorsque X décrit R_n , $\varphi(X)$ décrit $\llbracket 0, 2^{<n>} - 1 \rrbracket$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(A) &\leq \sum_{k=0}^{2^{<n>}-1} 2^k \\ &= 2^{2^{<n>}} - 1 \\ &= 2^{<n+1>} - 1\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ est donc une application de R_n vers $\llbracket 0, 2^{<n>} - 1 \rrbracket$. Montrons maintenant la bijectivité, encore une fois par récurrence sur n . Pour $n = 0$, c'est immédiat. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la bijectivité vérifiée pour n . Montrons que φ est une bijection de R_{n+1} sur $\llbracket 0, 2^{<n+1>} - 1 \rrbracket$. Ces deux ensembles étant finis et de même cardinal, il suffit de prouver la surjectivité. Soit $m \in \llbracket 0, 2^{<n+1>} - 1 \rrbracket$. Décomposons m en base 2.

$$m = \sum_{k=1}^p 2^{m_k}$$

où $p \geq 1$ et $0 < m_1 < \dots < m_p$. De plus, $m < 2^{<n+1>} = 2^{2^{<n>}}$ donc $m_p < 2^{<n>}$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe $X_1, \dots, X_p \in R_n$ tels que pour $i = 1, \dots, p$, $m_i = \varphi(X_i)$. Posons $A = \{X_1, \dots, X_p\}$. A est une partie de R_n donc $A \in R_{n+1}$, et

$$m = \sum_{k=1}^p 2^{\varphi(X_k)} = \varphi(A)$$

□

Proposition 9. φ est une bijection de HF sur $\mathbb{N}$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^m$. De là, il existe $A \in R_m$ tel que $\varphi(A) = m$. La fonction φ est donc surjective.

Soient $n, n' \in \mathbb{N}$. Supposons $\varphi(n) = \varphi(n')$. Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n < 2^{<m>}$ et $n' < 2^{<m>}$. Comme la restriction de φ à R_m est une injection de R_m dans $\llbracket 0, 2^{<m>} - 1 \rrbracket$, on en déduit $n = n'$. □

Proposition 10. $\varphi(R_n) = 2^{<n+1>} - 1$.

Démonstration. Lorsque X décrit R_n , $\varphi(X)$ décrit $\llbracket 0, 2^{<n>} - 1 \rrbracket$. De là,

$$\begin{aligned}\varphi(R_n) &= \sum_{X \in R_n} 2^{\varphi(X)} \\ &= \sum_{k=0}^{2^{<n>}-1} 2^k \\ &= 2^{2^{<n>}} - 1 = 2^{<n+1>} - 1\end{aligned}$$

□

2.3 La réciproque de φ

Définition 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'écriture binaire de n est

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k 2^k$$

où $a_k \in \{0, 1\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$m \prec n \iff a_m = 1$$

Remarquons que l'on a donc pour tout entier n ,

$$n = \sum_{k \prec n} 2^k$$

Si $n = 0$, la somme ci-dessus est une somme vide, donc nulle.

Rappelons que si $A \in HF$, alors

$$\varphi(A) = \sum_{X \in A} 2^{\varphi(X)}$$

On constate donc que pour tout $X \in HF$, $X \in A \iff \varphi(X) \prec \varphi(A)$. Posons $n = \varphi(A)$. On a donc

$$A = \{X \in HF, \varphi(X) \prec n\} = \{f^{-1}(m), m \prec n\}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^{-1}(n) = \{\varphi^{-1}(m), m \prec n\}$$

Cette égalité définit bien la fonction φ^{-1} . En effet,

- $\varphi^{-1}(0) = \{\varphi^{-1}(m), m \prec 0\} = \emptyset$
- Pour tout $n \geq 1$, si $\varphi^{-1}(m)$ est défini pour tout $m < n$, alors $\varphi^{-1}(n)$ l'est aussi car $m \prec n \implies m < n$.

Dans la suite, nous noterons $\psi = \varphi^{-1}$.

2.4 Exemples

L'expression de $\psi(n)$ devient très vite peu lisible. On peut améliorer les choses en introduisant les *entiers de von Neumann*, définis par $\bar{0} = \emptyset$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n+1} = \bar{n} \cup \{\bar{n}\}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. Lorsque cela ne pose pas de problème, nous identifierons n et $\bar{n}$.

- $\psi(0) = \emptyset = 0$.
- $\psi(1) = \{\emptyset\} = 1$
- $\psi(2) = \{\psi(1)\} = \{\{\emptyset\}\} = \{1\}$
- $\psi(3) = \{\psi(0), \psi(1)\} = \{0, 1\} = 2$

- $\psi(4) = \{\psi(2)\} = \{\{1\}\}$
- $\psi(5) = \{\psi(0), \psi(2)\} = \{0, \{1\}\}$
- $\psi(6) = \{\psi(1), \psi(2)\} = \{1, \{1\}\}$
- $\psi(7) = \{\psi(0), \psi(1), \psi(2)\} = \{0, 1, \{1\}\}$
- $\psi(8) = \{\psi(3)\} = \{2\}$

$\psi(123456789123456789) = \{0, \{1\}, \{\{1\}\}, \{2\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, 3, \{\{1\}, 2\}, \{1, \{1\}, 2\}, \{\{1\}, \{\{1\}\}\}, \{1, \{1\}, \{\{1\}\}\}, \{0, 1, \{1\}, \{\{1\}\}\}, \{1, 2, \{\{1\}\}\}, \{0, 1, 2, \{\{1\}\}\}, \{0, \{1\}, 2, \{\{1\}\}\}, \{0, 1, \{1\}, 2, \{\{1\}\}\}, \{\{0, \{1\}\}\}, \{0, \{0, \{1\}\}\}, \{0, 1, \{0, \{1\}\}\}, \{1, \{1\}, \{0, \{1\}\}\}, \{2, \{0, \{1\}\}\}, \{0, 2, \{0, \{1\}\}\}, \{0, 1, 2, \{0, \{1\}\}\}, \{\{1\}, 2, \{0, \{1\}\}\}, \{0, 1, \{1\}, 2, \{0, \{1\}\}\}, \{0, \{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}\}, \{1, \{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}\}, \{\{1\}, \{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}\}, \{0, \{1\}, \{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}\}, \{0, 1, \{1\}, \{\{1\}\}\}, \{0, \{1\}\}, \{2, \{\{1\}\}, \{0, \{1\}\}\}\}$

2.5 L'image par φ des entiers de von Neumann

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\bar{n} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$$

de là, en posant $u_n = \varphi(\bar{n})$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{u_k}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^n 2^{u_k} - \sum_{k=0}^{n-1} 2^{u_k} = 2^{u_n}$$

On a donc $\varphi(\bar{0}) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(\overline{n+1}) = 2^{\varphi(\bar{n})} + \varphi(\bar{n})$$

Les premières valeurs de φ sont $\varphi(\bar{0}) = 0$, $\varphi(\bar{1}) = 1$, $\varphi(\bar{2}) = 3$, $\varphi(\bar{3}) = 11$, $\varphi(\bar{4}) = 2059$. Enfin, $\varphi(\bar{5})$ vaut

661852284340449429518640674583960616149895222675773112978029474355704937244
014405492678684907989267736344943839680471439239568571402054064027405360874
460838310520368482324399959044049927980075147183260434105703798308704637800
852606194444172051991971237512107049703527278337554258761027760282673134058
094295488805547820407652775628283628842383254654485203483075749433459903099
416426669267233797295981858347350547325004154098838683614231599137708122187
727119017722495531534022877597895171217443367553504659016552051849173709742
024055869412110653955407655676631932971733672542303136122441829419995004023
88195450053080385547

3 Ensembles transitifs

3.1 Introduction

Introduisons la suite $(\sigma_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de HF en posant $\sigma_0 = \emptyset$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_{n+1} = \{\sigma_n\}$. On a $\sigma_n = \{\{\dots\{\emptyset\}\dots\}\}$ avec n accolades ouvrantes et

fermantes. $\varphi(\sigma_0) = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(\sigma_{n+1}) = 2^{\varphi(\sigma_n)}$$

Ainsi,

$$\varphi(\sigma_n) = 2^{<n>}$$

On constate donc que

$$\varphi(\sigma_n) = \min\{\varphi(A), \text{rg } A = n\}$$

Remarquons que

$$\varphi(R_n) = 2^{<n+1>} - 1 = \max\{\varphi(A), \text{rg } A = n\}$$

Pour tout $n \geq 0$, soit $\hat{n} = \{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. On a $\text{rg } \hat{n} = n$ et $|\hat{n}| = n$. De plus,

$$\varphi(\hat{n}) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\varphi(\sigma_k)} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2^{<k>}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{<k+1>}$$

3.2 Transitivité

Définition 4. Soit A un ensemble. A est *transitif* si pour tout $X \in A$, $X \subseteq A$. Dit autrement, A est transitif lorsque les éléments des éléments de A sont des éléments de A .

Proposition 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est transitif.

Démonstration. $R_0 = \emptyset$ est évidemment transitif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $X \in R_n = \mathcal{P}(R_{n-1})$. On a donc $X \subseteq R_{n-1}$. Or, $R_{n-1} \subset R_n$, donc $X \subseteq R_n$. $\square$

Proposition 12. HF est transitif.

Démonstration. En effet, si $A \in HF$, alors $A \subseteq HF$ (et A est fini). $\square$

Proposition 13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ est transitif.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\bar{n} = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}\}$$

Soit $X \in \bar{n}$. Il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que

$$X = \bar{k} = \{\bar{0}, \dots, \overline{k-1}\}$$

Clairement, $X \subseteq \bar{n}$. $\square$

Proposition 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\hat{n}$ est transitif.

Démonstration. Soit $X \in \hat{n}$. Si $X = \emptyset$, alors $X \subseteq \hat{n}$. Sinon, il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $X = \sigma_k = \{\sigma_{k-1}\}$. Comme $\sigma_{k-1} \in \hat{n}$, $X \subseteq \hat{n}$. $\square$

Proposition 15. Soit $A \in HF$. L'ensemble A est transitif si et seulement si pour tous entiers m et p , $p \prec m$ et $m \prec \varphi(A)$ implique $p \prec \varphi(A)$.

Démonstration. Soit $X \in HF$. Remarquons que $X \in A$ si et seulement si $g(X) \prec g(A)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} A \text{ est transitif} &\iff \forall X \in A, \forall Y \in X, Y \in A \\ &\iff \forall m \prec g(A), \forall p \prec m, p \prec g(A) \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in HF$ un ensemble transitif de rang n . Alors $|A| \geq n$.

Démonstration. Montrons par récurrence descendante sur k que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, A possède un élément de rang k . Comme A est de rang n , A possède un élément de rang $n-1$. Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Supposons que A possède un élément X de rang k . X , de rang k , possède un élément Y de rang $k-1$. Comme A est transitif, $Y \in A$.

L'ensemble A possède donc n éléments $X_0, \dots, X_{n-1}$ de rangs $0, \dots, n-1$. Ces éléments étant de rangs distincts, ils sont distincts. Ainsi, $|A| \geq n$. $\square$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Quels sont précisément les ensembles transitifs de rang n et de cardinal n ? Nous avons déjà rencontré l'entier de von Neumann $\bar{n}$ et l'ensemble σ_n . Y en a-t-il d'autres?

3.3 Ensembles transitifs de cardinal minimal

Soit A un ensemble transitif de rang n et de cardinal n . On a par la proposition précédente,

$$A = \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$$

où les X_k sont de rang k . Remarquons que X_0 , de rang 0, est nécessairement $\emptyset$. De même, X_1 est le seul ensemble de rang 1, à savoir $\{\emptyset\}$.

À partir de $k = 2$, les choses se compliquent. On peut avoir $X_2 = \{\{\emptyset\}\} = \sigma_2$ ou $X_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \bar{2}$.

Pour tout $k \geq 1$, X_k étant de rang k , il possède un élément de rang $k-1$. Par transitivité de A , $X_k \subseteq A$ et donc cet élément de rang $k-1$ ne peut être que X_{k-1} . Ainsi,

$$X_0 \in X_1 \in \dots \in X_{n-1}$$

Remarquons également que comme $X_{k+1}, \dots, X_{n-1}$ sont de rang strictement supérieur au rang de X_k , ils n'appartiennent pas à X_k . Ainsi, comme $X_k \subseteq A$,

$$X_k \subseteq \{X_0, \dots, X_{k-1}\}$$

et donc $|X_k| \leq k$. Les conditions que nous venons d'énumérer sont en fait suffisantes.

Proposition 17. *Soit $A \in HF$. Soit $n \in \mathbb{N}$. A est transitif de rang n et de cardinal n si et seulement si $A = \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ où*

- Les X_k sont de rang k .
- $X_0 \in X_1 \in \dots \in X_{n-1}$.
- Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $X_k \subseteq \{X_0, \dots, X_{k-1}\}$.

Démonstration. Nous avons déjà vu que ces conditions sont nécessaires. Inversement, supposons ces conditions réalisées.

- Le cardinal de A est bien n .
- Le rang de A est effectivement n .
- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. La troisième condition montre que $X_k \subseteq A$ et donc A est transitif.

□

Proposition 18. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement $2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$ ensembles transitifs de rang n et de cardinal n .*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On construit un ensemble A de rang n et cardinal n comme suit.

- Choix d'un élément X_0 de rang 0 : une possibilité.
- Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposant choisis $X_0, \dots, X_{k-1}$: choix d'un élément X_k de rang k tel que $X_{k-1} \in X_k$ et $X_k \subseteq \{X_0, \dots, X_{k-1}\}$. Cela revient à choisir une partie de $\{X_0, \dots, X_{k-2}\}$. Il y a donc 2^{k-1} possibilités.

En appelant T_n le nombre d'ensembles transitifs de rang n et de cardinal n , on a donc

$$T_n = \prod_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{\sum_{k=1}^{n-1} (k-1)} = 2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}$$

□

Voici donc le nombre d'ensembles transitifs de rang n et de cardinal n pour les premières valeurs de n .

n	0	1	2	3	4	5	6
T_n	1	1	1	2	8	64	1024

Quelles sont les valeurs minimale et maximale de φ sur les ensembles transitifs de rang n et de cardinal n ?

Proposition 19. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit A un ensemble transitif de rang n et de cardinal n . On a*

$$\varphi(\widehat{n}) \leq \varphi(A) \leq \varphi(\overline{n})$$

L'une des inégalités est une égalité si et seulement si $A = \widehat{n}$ ou $A = \overline{n}$.

Démonstration. φ est injective et donc $\varphi(A) = \varphi(\widehat{n})$ entraîne $A = \widehat{n}$. De même pour $\overline{n}$.

Montrons maintenant les inégalités. Posons $A = \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ avec les notations déjà utilisées. On a

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{\varphi(X_k)} \geq \sum_{k=0}^{n-1} 2^{2^{<k>}} = \varphi(\widehat{n})$$

Montrons l'autre inégalité par récurrence sur n . C'est clair pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout A transitif de rang n et de cardinal n , $\varphi(A) \leq \varphi(\overline{n})$. Soit A transitif de rang $n+1$ et de cardinal $n+1$. On a donc

$$A = \{X_0, \dots, X_n\} = A' \cup \{X_n\}$$

avec les conditions déjà citées sur les X_k . Ces conditions montrent que A' est transitif, de rang n et de cardinal n . Par l'hypothèse de récurrence, $\varphi(A') \leq \varphi(\overline{n})$. De plus, $X_n \subseteq A'$, donc $\varphi(X_n) \leq \varphi(A')$. De là,

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= \varphi(A') + 2^{\varphi(X_n)} \\ &\leq \varphi(A') + 2^{\varphi(A')} \\ &\leq \varphi(\overline{n}) + 2^{\varphi(\overline{n})} \\ &= \varphi(\overline{n+1}) \end{aligned}$$

□

3.4 Ensembles bitransitifs

La relation $\in$ est irréflexive sur HF . En effet, soit $X \in HF$. Le rang des éléments de X est strictement inférieur à $\text{rg } X$, donc $X \notin X$. La relation $\in$ est aussi asymétrique. En effet, pour tous $X, Y \in HF$, $X \in Y \implies \text{rg } X < \text{rg } Y$. On ne peut donc pas avoir simultanément $X \in Y$ et $Y \in X$. En revanche, la relation $\in$ n'est pas transitive sur HF . Par exemple, $\emptyset \in \{\emptyset\}$ et $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$ mais $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$. Ceci suggère une définition.

Définition 5. Soit $A \in HF$ un ensemble transitif. A est *bitransitif* si la relation $\in$ est transitive sur A .

Un ensemble $A \in HF$ est donc bitransitif si et seulement si il est transitif, et la relation $\in$ est un ordre strict sur A .

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n}$ est bitransitif. En fait, nous allons montrer que les entiers de von Neumann sont les seuls ensembles bitransitifs de HF .

Proposition 20. *Soit $A \in HF$. A est bitransitif si et seulement si A est transitif et ses éléments sont aussi transitifs.*

Démonstration. Supposons que A est transitif, ainsi que ses éléments. Soient $X, Y, Z \in A$. Supposons $X \in Y$ et $Y \in Z$. Comme $Z \in A$, Z est transitif. Ainsi, comme $Y \in Z$, on a aussi $Y \subseteq Z$ et donc $X \in Z$.

Inversement, supposons A bitransitif. Soit $Z \in A$. Soit $Y \in Z$. Soit $X \in Y$. Par transitivité de A , $X, Y \in A$. Par transitivité de $\in$, on a donc $X \in Z$. Ainsi, Z est transitif. $\square$

Proposition 21. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ est l'unique ensemble bitransitif de cardinal n .*

Démonstration. Nous avons déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ est bitransitif. De plus, $\bar{n}$ est de cardinal n .

Montrons l'unicité par récurrence sur n . C'est évident pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que le seul ensemble bitransitif de cardinal n est $\bar{n}$. Soit A bitransitif de cardinal $n+1$. Soit X un élément de A de rang maximal. Posons $A' = A \setminus \{X\}$. Pour tout $Y \in A'$, $X \notin Y$ puisque $\text{rg } Y \leq \text{rg } X$. Soit $Y \in A'$. Par transitivité de A , $Y \subseteq A$. De plus, $X \notin Y$, donc $Y \subseteq A'$. Ainsi, A' est transitif. Les éléments de A' sont des éléments de A et A est bitransitif, donc les éléments de A' sont transitifs. Ainsi, A' est bitransitif. Comme $|A'| = n$, l'hypothèse de récurrence entraîne que $A' = \bar{n}$. Ainsi,

$$A = \{\bar{0}, \dots, \overline{n-1}, X\}$$

Remarquons que les éléments de A' sont de rangs $0, 1, 2, \dots, n-1$. X est de rang maximal dans A , donc $\text{rg } X \geq n-1$. Par la transitivité de A , $X \subseteq A$. De plus, $X \notin X$, donc $X \subseteq A'$.

Soit r le rang de X . Si $r = 0$, alors $X = \emptyset$. Cela veut dire, comme X est de rang maximal dans A , que $A = \{0\}$. Si $r \geq 1$, X possède un élément de rang $r-1$, qui appartient à A' . Cet élément est donc $\overline{r-1}$. Par la transitivité de X , $\overline{r-1} \subseteq X$, et donc $\bar{0} \in X, \dots, \overline{r-2} \in X$. De plus, comme tous les éléments de X sont de rang strictement inférieur à r , $\bar{r} \notin X, \dots, \overline{n-1} \notin X$. De là, comme $X \subseteq A'$,

$$X = \{\bar{0}, \dots, \overline{r-1}\} = \bar{r}$$

Enfin, $X \notin A'$, donc $r \neq 0, 1, \dots, n-1$, donc $r \geq n$. Comme $X \subseteq A'$, il en résulte que $r = n$, et donc $X = \bar{n}$. Finalement,

$$A = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\} = \overline{n+1}$$

$\square$

Corollaire 22. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bar{n}$ est l'unique ensemble transitif de rang n .*

Démonstration. En effet, $\text{rg } \bar{n} = n$. $\square$