

Le théorème de Cantor-Bernstein

Marc Lorenzi

18 août 2024

1 Un cas particulier

Proposition 1. [CANTOR-BERNSTEIN, CAS PARTICULIER]

Soient A et B deux ensembles. On suppose

- $B \subseteq A$.
- *Il existe une injection de A vers B .*

Alors, il existe une bijection de A sur B .

Soit $f : A \xrightarrow{\text{inj}} B$. Remarquons que comme $B \subseteq A$, on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n^{e} itérée de f . On a $f^0 = \text{id}_A$ et pour tout $n \geq 1$, $f^n : A \rightarrow B$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_n = f^n(A \setminus B)$. On a donc $C_0 = A \setminus B$ et pour tout $n \geq 1$, $C_n \subseteq B$. Posons ensuite

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$$

et $C' = A \setminus C$.

Lemme 2. C est stable par f .

Démonstration.

$$f(C) = f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(C_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{n+1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subseteq C$$

□

Lemme 3. $C' \subseteq B$.

Démonstration. On a $C_0 \subseteq C$, donc $C' = A \setminus C \subseteq A \setminus C_0 = B$. □

Lemme 4. Les ensembles C_n , $n \in \mathbb{N}$, sont disjoints deux à deux.

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $m \leq n$. Supposons que $C_m \cap C_n \neq \emptyset$. Soit $y \in C_m \cap C_n$. Il existe donc $x, x' \in A \setminus B$ tels que

$$y = f^m(x) = f^n(x')$$

Par l'injectivité de f^m ,

$$x = f^{n-m}(x')$$

Ainsi, $x \in C_{n-m}$ et donc $C_{n-m} \cap (A \setminus B) \neq \emptyset$. Or, pour tout $p \geq 1$, $C_p \subseteq B$. On en déduit que $m = n$. En contraposant, si $m \neq n$ alors $C_m \cap C_n = \emptyset$. $\square$

Soit $h : A \longrightarrow B$ définie pour tout $x \in A$ par

- $h(x) = f(x)$ si $x \in C$
- $h(x) = x$ si $x \in C'$

Lemme 5. *h est une bijection de A sur B .*

Démonstration.

Soit $y \in B$. Si $y \in C'$ alors $y = h(y)$ donc y a un antécédent par h . Si $y \in C$ alors, comme $y \in B$, $y \notin C_0$. Il existe donc $n \geq 1$ tel que $y \in C_n = f(C_{n-1})$. De là, il existe $x \in C_{n-1}$ (unique) tel que $y = f(x)$. Comme $x \in C$, $f(x) = h(x)$, donc x est un antécédent de y par h .

Montrons que h est injective. Soient $x, x' \in A$. Supposons $h(x) = h(x')$. Quatre cas se présentent.

- Cas 1, $x \in C$ et $x' \in C$. On a donc $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$. Comme f est injective, $x = x'$.
- Cas 2, $x \in C'$ et $x' \in C'$. On a donc $x = h(x) = h(x') = x'$.
- Cas 3, $x \in C$ et $x' \in C'$. On a donc $f(x) = h(x) = h(x') = x'$. Contradiction puisqu'alors $x' \in f(C) \subseteq C$.
- Cas 4, $x \in C'$ et $x' \in C$. Comme pour le cas 3, on obtient une contradiction.

$\square$

2 Le cas général

Théorème 6. [CANTOR-BERNSTEIN]

Soient A et B deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A . Alors, il existe une bijection de A sur B .

Démonstration. Soient $f : A \xrightarrow{\text{inj}} B$ et $g : B \xrightarrow{\text{inj}} A$. Soient $B' = g(B) \subseteq A$ et $g' : B \longrightarrow B'$ la corestriction de g à B' . La fonction g' est bijective et $g' \circ f : A \longrightarrow B'$, composée d'une injection et d'une bijection, est une injection. Par la proposition 1, il existe une bijection $h : A \longrightarrow B'$. La fonction $g'^{-1} \circ h : A \longrightarrow B$ est la composée de deux bijections, c'est donc une bijection. $\square$

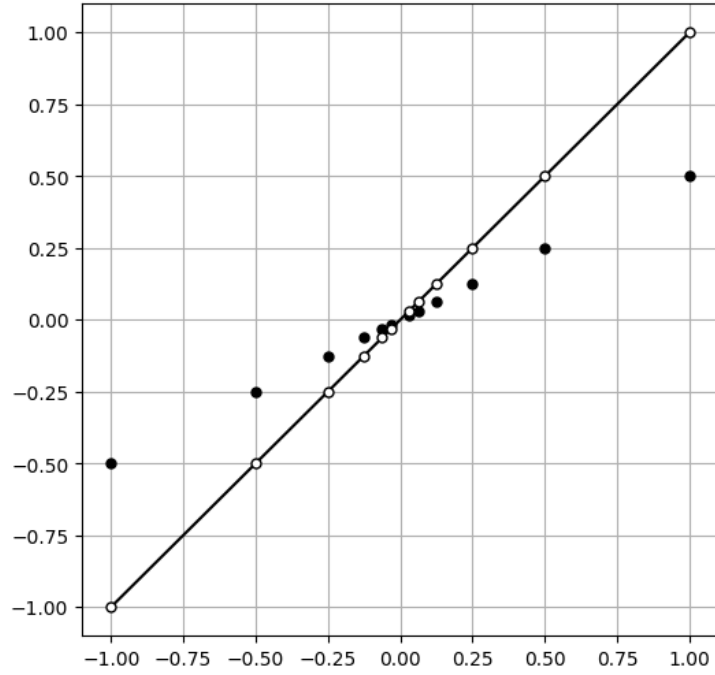


FIGURE 1 – Une bijection de $[-1, 1]$ sur $] - 1, 1[$

3 Un exemple

Soit $f : [-1, 1] \longrightarrow] - 1, 1[$ définie par $f(x) = x/2$. La fonction f est une injection. En reprenant les notations de la preuve du lemme, on a $A = [-1, 1]$, $B =] - 1, 1[$ et facilement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n = f^n(C_0) = \left\{ \pm \frac{1}{2^n} \right\}$$

et donc

$$C = \left\{ \pm \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

et $C' = [-1, 1] \setminus C$. Une bijection de A sur B est donc la fonction $h : [-1, 1] \longrightarrow] - 1, 1[$ définie par $h(x) = x/2$ si $x \in C$ et $h(x) = x$ sinon.

4 Quelques applications

Le théorème de Cantor-Bernstein permet de montrer que deux ensembles sont équipotents en créant deux injections, ce qui est souvent plus facile que de créer une bijection. Nous allons regarder quelques exemples.

4.1 Les intervalles de $\mathbb{R}$

L'exemple de la section 3 suggère qu'il serait possible de construire explicitement une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ non triviaux. Le théorème de Cantor-Bernstein nous permet de prouver qu'une telle bijection existe, sans la construire.

Proposition 7. *Tous les intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points sont en bijection.*

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer qu'il existe une bijection d'un tel intervalle sur $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points $a < b$.

Tout d'abord, remarquons que la fonction $x \mapsto x$ est une injection de I vers $\mathbb{R}$.

Construisons maintenant une injection de $\mathbb{R}$ vers I . La fonction tangente hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$. La fonction $\varphi :] -1, 1[\rightarrow]a, b[$ définie par

$$\varphi(t) = \frac{a+b}{2} + t \frac{b-a}{2}$$

est une bijection. Enfin, la fonction $\psi : x \mapsto x$ est une injection de $]a, b[$ vers I . De là,

$$\psi \circ \varphi \circ \text{th} : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{inj}} I$$

Par le théorème de Cantor-Bernstein, il existe une bijection de I sur $\mathbb{R}$. $\square$

4.2 Parties de $\mathbb{N}$

Proposition 8. *Il existe une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Considérons la fonction $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à toute suite $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\{0, 1\}$ associe

$$f(\mathbf{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n+1}}$$

On montre facilement que f est injective.

Inversement, tout réel $x \in [0, 1[$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

où $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\{0, 1\}$ qui n'est pas stationnaire, égale à 1. La fonction $x \mapsto \mathbf{a}$ est donc une injection de $[0, 1[$ vers $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Comme $[0, 1[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points, il existe

une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1[$. En composant, on obtient une injection de $\mathbb{R}$ sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

On conclut par le théorème de Cantor-Bernstein. $\square$

Proposition 9. *Il existe une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Considérons la fonction $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ définie, pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$ et tout $n \in \mathbb{N}$ par $\chi_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\chi_A(n) = 0$ sinon. La suite χ_A est la *fonction indicatrice* de A . Facilement, χ est une bijection. Sa réciproque est la fonction $\psi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $\varphi(\mathbf{a}) = \{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$.

En composant φ avec une bijection de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$, on obtient une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$. $\square$