

Définitions par récurrence

Marc Lorenzi

16 février 2021

1 Le théorème de définition par récurrence

Proposition 1. Soit E un ensemble non vide. Soit $a \in E$. Soit $f : E \rightarrow E$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E vérifiant

1. $u_0 = a$.
2. Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

On suppose E , a et f donnés dans toute la suite.

L'unicité est immédiate.

Proposition 2. Il existe au plus une suite vérifiant 1. et 2.

Démonstration. Soient $u, u' \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant 1. et 2. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geq 0$, $u_n = u'_n$.

- Par 1., on a $u_0 = u'_0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons $u_n = u'_n$. Par 2., on a

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(u'_n) = u'_{n+1}$$

□

La preuve de l'existence pourra paraître inutilement compliquée au lecteur ... mais on ne peut pas vraiment faire plus simple.

Définition 1. Soit $n \geq 0$. La suite $v \in E^{\mathbb{N}}$ est n -acceptable si

- 1'. $v_0 = a$.
- 2'. Pour tout $k < n$, $v_{k+1} = f(v_k)$.

Notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des suites acceptables. Notons également $\mathcal{A}$ l'ensemble des suites vérifiant 1. et 2. On a, pour tout entier n , $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_n$. Plus précisément, une suite vérifie 1. et 2. si et seulement si elle est n -acceptable pour tout entier n . Ainsi,

$$\mathcal{A} = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{A}_n$$

La proposition 2 montre que $\mathcal{A}$ contient au plus un élément. Tout le problème est de montrer que $\mathcal{A}$ contient au moins un élément.

Lemme 3. Soit $n \geq 0$. Soit v une suite $(n+1)$ -acceptable. Alors v est n -acceptable.

Démonstration. Une propriété vérifiée pour tout $k < n+1$ l'est bien entendu pour tout $k < n$. $\square$

Nous venons donc de montrer que

$$\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots \supset \mathcal{A}$$

Le lemme 4 nous raconte que deux suites n -acceptables ont leurs termes de rang n égaux. On pourrait même montrer qu'elles ont tous leurs termes égaux du rang 0 au rang n , mais nous n'en aurons pas besoin. Contentons-nous du strict nécessaire.

Lemme 4. Soit $n \geq 0$. Soient v et v' deux suites n -acceptables. Alors $v_n = v'_n$.

Démonstration. On procède par récurrence sur n .

- Soient v et v' deux suites 0-acceptables. Par 1', on a $v_0 = a = v'_0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons la propriété vraie pour n . Soient v et v' deux suites $(n+1)$ -acceptables. Par le lemme 3, v et v' sont n -acceptables. L'hypothèse de récurrence assure donc $v_n = v'_n$. La $(n+1)$ -acceptabilité de v et v' et la propriété 2'. (avec $k = n < n+1$) permettent alors d'écrire

$$v_{n+1} = f(v_n) = f(v'_n) = v'_{n+1}$$

$\square$

Lemme 5. Pour tout entier $n \geq 0$ il existe une suite n -acceptable.

Démonstration. Ici encore une récurrence sur n s'impose.

- La suite constante $(a, a, a, \dots)$ est 0-acceptable.
- Soit $n \geq 0$. Supposons qu'il existe une suite v qui est n -acceptable. Soit $v' \in E^{\mathbb{N}}$ définie par
 - ★ Pour tout $k \leq n$, $v'_k = v_k$.
 - ★ $v'_{n+1} = f(v_n)$.
 - ★ Pour tout $k \geq n+2$, $v'_k = a$.
 On vérifie aisément que v' est $(n+1)$ -acceptable.

Nous venons de montrer que les ensembles $\mathcal{A}_n$ sont non vides.

$\square$

Nous voici en mesure de finir la preuve de la proposition 1.

Démonstration. Pour tout n entier, notons u_n la valeur (commune par le lemme 4) du n ème terme des suites n -acceptables (il existe de telles suites par le lemme 5).

- Soit v une suite 0-acceptable. On a $u_0 = v_0 = a$. La suite u vérifie donc 1.
- Soit $n \geq 0$. Soit v une suite $(n+1)$ -acceptable. On a

$$u_{n+1} = v_{n+1} = f(v_n)$$

Par le lemme 1, v étant $(n+1)$ -acceptable est aussi n -acceptable. Ainsi, $v_n = u_n$. De là, $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite u vérifie donc 2.

□

À partir de là, il est facile d'énoncer d'autres théorèmes de définition par récurrence.

2 Autres théorèmes de définition par récurrence

2.1 Définition par récurrence forte

Proposition 6. Soit E un ensemble non vide. Soit $F : \mathcal{P}(E) \rightarrow E$. Il existe une unique suite u d'éléments de E vérifiant pour tout entier n

$$u_n = F(\{u_k, 0 \leq k < n\})$$

Démonstration. Soit $a = F(\emptyset)$. Soit $G : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $G(X) = X \cup \{F(X)\}$. Par la proposition 1, il existe une unique suite U à valeurs dans $\mathcal{P}(E)$ telle que $U_0 = \emptyset$ et, pour tout entier n , $U_{n+1} = G(U_n)$. Posons, pour tout entier n , $u_n = F(U_n)$.

Montrons par récurrence sur n que pour tout entier n , $U_n = \{u_k, k < n\}$.

- On a $U_0 = \emptyset = \{k, k < 0\}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n = \{u_k, k < n\}$. On a alors

$$U_{n+1} = G(U_n) = U_n \cup \{F(U_n)\} = \{u_k, k < n\} \cup \{u_n\} = \{u_k, k < n+1\}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_n = F(U_n) = F(\{u_k, k < n\})$$

La suite u vérifie donc la propriété voulue.

L'unicité est quant à elle facile. Soient u, u' deux telles suites. Montrons par récurrence forte sur n que pour tout entier n , $u_n = u'_n$.

- On a $u_0 = F(\{u_k, k < 0\}) = F(\emptyset)$ et de même pour u'_0 .
- Soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout $k < n$, $u_k = u'_k$. On a alors

$$u_n = F(\{u_k, k < n\}) = F(\{u'_k, k < n\}) = u'_{n+1}$$

□

Autre exemple, le théorème de définition par récurrence à deux termes.

2.2 Définition par récurrence à deux termes

Proposition 7. Soit E un ensemble non vide. Soit $f : E \times E \rightarrow E$. Soient $a, b \in E$. Il existe une unique suite u d'éléments de E vérifiant

- $u_0 = a$.
- $u_1 = b$.
- Pour tout entier n , $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$.

Démonstration. Soit $F : E \times E \rightarrow E \times E$ définie par $F(x, y) = (y, f(x, y))$. Par la proposition 1, il existe une unique suite U à valeurs dans $E \times E$ vérifiant $U_0 = (a, b)$ et, pour tout entier n , $U_{n+1} = F(U_n)$. Posons, pour tout entier n , $U_n = (u_n, v_n)$. Montrons par récurrence sur n que pour tout entier n , $v_n = u_{n+1}$.

- On a $U_1 = (u_1, v_1) = F(U_0) = (v_0, f(u_0, v_0))$. Ainsi, $u_1 = v_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n = u_{n+1}$. On a alors

$$U_{n+1} = (u_{n+1}, v_{n+1}) = F(U_n) = (v_n, f(u_n, v_n))$$

Ainsi, $u_{n+1} = v_n$.

Il est maintenant facile de voir que la suite u vérifie la propriété voulue.

- $U_0 = (a, b) = (u_0, u_1)$, donc $u_0 = a$ et $u_1 = b$.
- Pour tout entier n , $v_{n+1} = f(u_n, v_n)$, ou encore $u_{n+2} = f(u_n, u_{n+1})$.

L'unicité de la suite u se montre quant à elle facilement par une récurrence à deux termes. $\square$