

## La diagonale de Cantor

L'ensemble  $[0, 1]$  des nombres réels entre 0 et 1 contient en particulier les nombres

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, 1 \\ x_2 &= 0, 01 \\ x_3 &= 0, 001 \\ x_4 &= 0, 0001 \\ x_5 &= 0, 00001 \\ x_6 &= 0, 000001 \\ x_7 &= 0, 0000001 \\ x_8 &= 0, 00000001 \\ x_9 &= 0, 000000001 \\ x_{10} &= 0, 0000000001 \\ &\vdots \end{aligned}$$

L'ensemble  $[0, 1]$  est donc « au moins aussi gros » que l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels parce qu'il contient une liste infinie d'éléments qui sont numérotés par les entiers naturels.

Maintenant, nous allons voir par un argument dû à Cantor que  $[0, 1]$  est « vraiment plus gros » que  $\mathbb{N}$ , c'est à dire qu'*aucune* liste de nombres réels de l'ensemble  $[0, 1]$  numérotés par les entiers naturels ne peut contenir *tous* les éléments de  $[0, 1]$ . Prenons par exemple la liste  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ci-dessous. Pour chaque entier  $n \geq 1$ , j'ai encadré la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $x_n$ .

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \boxed{7}74230296028109\dots \\ x_2 &= 0, 1\boxed{8}22097466081315\dots \\ x_3 &= 0, 95\boxed{1}2812186931464\dots \\ x_4 &= 0, 161\boxed{0}3608152847382\dots \\ x_5 &= 0, 5571\boxed{9}97435893323\dots \\ x_6 &= 0, 61561\boxed{1}2263522687\dots \\ x_7 &= 0, 451971\boxed{5}933672699\dots \\ x_8 &= 0, 1827909\boxed{3}236410993\dots \\ x_9 &= 0, 17371434\boxed{0}55700408\dots \\ x_{10} &= 0, 165992012\boxed{4}4907535\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Considérons le nombre

$$a = 0.8921026415\dots$$

Comment a-t-on fabriqué  $a$  ? Pour tous les entiers  $n = 1, 2, 3, \dots$  on a choisi la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $a$  de sorte qu'elle ne soit pas égale à la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $x_n$ . Par exemple, la 6<sup>e</sup> décimale de  $x_6$  est égale à 1. On choisit donc la 6<sup>e</sup> décimale de  $a$  égale à un entier différent de 1 ( j'ai pris 2).

On a  $a \neq x_1$  parce que la première décimale de  $a$  n'est pas égale à la première décimale de  $x_1$ . De même,  $a \neq x_2$  parce que la deuxième décimale de  $a$  n'est pas égale à la deuxième décimale de  $x_2$ . Plus généralement, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a \neq x_n$  parce que la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $a$  n'est pas égale à la  $n^{\text{e}}$  décimale de  $x_n$ .  
*Conclusion :  $a$  n'est pas dans la liste  $x_1, x_2, x_3, \dots$*