

Ensembles dénombrables

Marc Lorenzi

3 juin 2026

1 Introduction

1.1 Quelques rappels et notations

On suppose dans cet article que le lecteur est familier avec la notion d'ensemble fini. Rappelons qu'un ensemble A est *fini* s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que A soit en bijection avec $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. L'entier n est alors unique, on l'appelle le *cardinal* de A . Un ensemble qui n'est pas fini est *infini*. Les parties d'un ensemble fini sont des ensembles finis. En contraposant, tout ensemble qui possède un sous-ensemble infini est lui-même infini. Un exemple d'ensemble infini est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Tous les ensembles contenant $\mathbb{N}$, comme par exemple $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, sont donc aussi infinis.

Définition 1.1.1. Deux ensembles A et B sont *équipotents* s'il existe une bijection de A sur B . Nous noterons $A \simeq B$.

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence sur la classe des ensembles.

1.2 Notion d'ensemble dénombrable

Définition 1.2.2. L'ensemble A est dénombrable si $A \simeq \mathbb{N}$.

Bien entendu, $\mathbb{N}$ est dénombrable. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs l'est aussi.

Proposition 1.2.1. $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(2n) = n$ et $f(2n+1) = -n-1$. On vérifie facilement que f est bijective, et donc $\mathbb{N} \simeq \mathbb{Z}$. $\square$

La relation d'équipotence conserve la dénombrabilité.

Proposition 1.2.2. Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est dénombrable. L'ensemble B est dénombrable si et seulement si A et B sont équipotents.

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ une bijection. Supposons $A \simeq B$. Soit $g : A \longrightarrow B$ une bijection. La bijection $g \circ f : \mathbb{N} \longrightarrow B$ est alors une bijection, donc B est dénombrable.

Inversement, supposons $B \simeq \mathbb{N}$. Soit $h : B \longrightarrow \mathbb{N}$ bijective. L'application $f \circ h : B \longrightarrow A$ est alors une bijection, donc $B \simeq A$. $\square$

1.3 Minimalité du dénombrable

Nous allons voir dans ce paragraphe que l'infini du dénombrable est, d'une certaine façon, le « plus petit » des infinis. Je m'en excuse d'avance, la démonstration de la première propriété non triviale de cet article est assez technique. Que le lecteur se rassure, ce sera assez peu le cas ensuite.

Commençons par définir par récurrence forte sur n la notion paraît-il évidente de n^e plus petit élément d'une partie infinie B de $\mathbb{N}$, que nous noterons $\min_B(n)$. Posons $\min_B(0) = \min B$. Soit $n \geq 1$. Supposons définis $\min_B(0), \dots, \min_B(n-1)$ avec les propriétés suivantes :

- $\min_B(0) < \dots < \min_B(n-1)$.
- Pour tout $x \in B$ différent des $\min_B(i)$, $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $\min_B(n-1) < x$.

L'ensemble $B_n = \{\min_B(i), i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ est fini de cardinal n , donc $B_n \neq B$ puisque B est infini. On pose alors $\min_B(n) = \min(B \setminus B_n)$. Par les hypothèses faites, on a $\min_B(n-1) < \min_B(n)$. De plus, pour tout $x \in B$ différent des $\min_B(i)$, $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $\min_B(n) < x$.

Nous avons donc défini une fonction $\min_B : \mathbb{N} \longrightarrow B$.

Notre première proposition montre qu'il n'y a pas d'infini « strictement plus petit » que l'infini dénombrable.

Proposition 1.3.3. *Soit A un ensemble dénombrable. Les sous-ensembles de A sont finis ou dénombrables.*

Démonstration. Montrons d'abord que les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ sont finis ou dénombrables. Soit $B \subseteq \mathbb{N}$. Supposons B infini. La fonction $\min_B : \mathbb{N} \longrightarrow B$ est strictement croissante, donc $\min_B$ est injective. Toujours par la croissance stricte de $\min_B$, une récurrence facile sur n montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\min_B(n) \geq n$. Soit $x \in B$. On a donc $x \leq \min_B(x)$.

Pour tout $y \in B \setminus \{\min_B(i), i \in \llbracket 0, x \rrbracket\}$, on a $y > \min_B(x)$, donc $x \in \{\min_B(i), i \in \llbracket 0, x \rrbracket\}$. La fonction $\min_B$ est donc surjective.

Soit maintenant un ensemble A dénombrable quelconque. Soit $B \subseteq A$. Soit $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Les ensembles B et $\varphi(B) \subseteq \mathbb{N}$ sont en bijection. Par ce qui précède, $\varphi(B)$ est fini ou dénombrable, donc B aussi. $\square$

Remarque. Si nous comparons cette propriété avec la propriété analogue concernant les ensembles finis, nous voyons des ressemblances : tout sous-ensemble d'un ensemble fini est aussi un ensemble fini. Il y a cependant une grosse différence : si A est fini, $B \subseteq A$ et le cardinal de B est égal au cardinal de A , alors $B = A$. Ce résultat ne s'étend pas aux ensembles dénombrables. Par exemple, les ensembles $2\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ sont tous les deux dénombrables (oserait-on dire « de même cardinal » ?) et $2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Pourtant, $2\mathbb{N} \neq \mathbb{N}$.

Notre deuxième proposition prouve que tous les infinis sont « plus gros » que l'infini dénombrable.

Proposition 1.3.4. *Tout ensemble infini contient un sous-ensemble dénombrable.*

Démonstration. Soit A un ensemble infini. Nous allons construire une injection $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Définissons $f(n)$ par récurrence forte sur n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, supposons construits $f(0), \dots, f(n-1)$ distincts deux à deux. L'ensemble $A_n = \{f(0), \dots, f(n-1)\}$ est fini et A est infini, donc $A \setminus A_n$ n'est pas vide. On choisit $f(n) \in A \setminus A_n$.

L'injection f étant construite, elle est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $B = f(\mathbb{N})$. L'ensemble $B \subseteq A$ est ainsi dénombrable. $\square$

Remarque. Remarquons, dans la preuve ci-dessus, l'utilisation du terme « on choisit ». Notre preuve utilise effectivement une variante faible de l'axiome du choix appelée *l'axiome du choix dénombrable*.

1.4 Injections, surjections

Proposition 1.4.5. *Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est dénombrable. Il existe une injection de B dans A si et seulement si B est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $f : B \rightarrow A$ injective. On a $B \simeq f(B)$. Or, $f(B) \subseteq A$, donc $f(B)$ est fini ou dénombrable. Il en est donc de même pour B .

Inversement, supposons B fini ou dénombrable. Si B est fini, il existe une bijection de B sur $\llbracket 0, n-1 \rrbracket \subseteq \mathbb{N}$ où $n \in \mathbb{N}$. Sinon, B est dénombrable et il existe une bijection de B sur $\mathbb{N}$. Dans tous les cas, il existe une injection $f : B \rightarrow \mathbb{N}$. Comme A est dénombrable, il existe une bijection $g : \mathbb{N} \rightarrow A$. L'application $g \circ f : B \rightarrow A$ est alors une injection. $\square$

Proposition 1.4.6. *Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est dénombrable. Il existe une surjection de A sur B si et seulement si B est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Supposons qu'il existe $f : A \rightarrow B$ surjective. La surjection f admet un inverse à droite $g : B \rightarrow A$ qui est injectif. D'où la conclusion par la proposition précédente.

Inversement, supposons B fini ou dénombrable. Si B est fini, on construit facilement une surjection de $\mathbb{N}$ sur B . Si B est dénombrable, il existe une bijection de $\mathbb{N}$ sur B . Dans tous les cas, il existe une surjection $f : \mathbb{N} \rightarrow B$. Soit $g : A \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection. L'application $f \circ g : A \rightarrow B$ est alors une surjection. $\square$

2 Opérations sur les ensembles dénombrables

2.1 Réunion

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser à la réunion d'un nombre fini d'ensembles finis ou dénombrables. Nous ferons mieux plus loin.

Proposition 2.1.7. *La réunion d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble fini ou dénombrable est un ensemble dénombrable.*

Démonstration. Soient A un ensemble dénombrable et B un ensemble fini ou dénombrable. Soient $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ une bijection et $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ une surjection. Soit $h : \mathbb{N} \rightarrow A \cup B$ définie comme suit. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(2n) = f(n)$ et $h(2n+1) = g(n)$. L'application h est surjective, donc $A \cup B$ est fini ou dénombrable. De plus, $A \cup B$ est infini, car A l'est. $\square$

Corollaire 2.1.8. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis ou dénombrables. La réunion des A_i est un ensemble fini ou dénombrable. Cet ensemble est dénombrable si et seulement si l'un des A_i est dénombrable.*

Démonstration. Si tous les A_i sont finis, alors leur réunion est un ensemble fini. Supposons que l'un des A_i est dénombrable. L'opération de réunion est commutative, on peut donc supposer A_1 dénombrable. La proposition précédente et une récurrence immédiate sur n montrent alors que la réunion des A_i est dénombrable. $\square$

2.2 Produit cartésien

Proposition 2.2.9. *Si A et B sont deux ensembles finis ou dénombrables, alors $A \times B$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Soient $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ et $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ deux injections. Considérons l'application $h : A \times B \rightarrow \mathbb{N}$ définie par

$$h(a, b) = 2^{f(a)} 3^{g(b)}$$

Soient $(a, b), (a', b') \in A \times B$. Supposons $h(a, b) = h(a', b')$. On a donc

$$2^{f(a)} 3^{g(b)} = 2^{f(a')} 3^{g(b')}$$

Par l'unicité de l'écriture d'un entier en produit de nombres premiers, on a $f(a) = f(a')$ et $g(b) = g(b')$. Comme f et g sont injectives, $a = a'$ et $b = b'$. Ainsi, h est une injection de $A \times B$ dans $\mathbb{N}$, donc $A \times B$ est fini ou dénombrable. $\square$

Une application immédiate de ce résultat est la dénombrabilité de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

Proposition 2.2.10. *$\mathbb{Q}$ est dénombrable.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(p, q) = p/q$. L'application f est surjective. Les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables donc, par la proposition précédente, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ l'est aussi. Ainsi, $\mathbb{Q}$ est fini ou dénombrable. Comme $\mathbb{Q}$ est infini, on a la conclusion désirée. $\square$

Proposition 2.2.11. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des ensembles finis ou dénombrables. L'ensemble $A_1 \times \dots \times A_n$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Récurrence immédiate sur n . $\square$

Qu'en est-il du produit cartésien d'une infinité d'ensembles finis ou dénombrables? Nous allons voir dans le prochain paragraphe que, sauf dans les cas triviaux, un tel produit n'est jamais dénombrable.

2.3 Un ensemble non dénombrable

Proposition 2.3.12. *L'ensemble $A = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ est infini, non dénombrable.*

Démonstration. A est clairement un ensemble infini. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Montrons que f n'est pas surjective. Soit $u \in A$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_n = 1 - f(n)_n$$

Dit autrement, si le n^e terme de la suite $f(n)$ est égal à 0, alors $u_n = 1$. Sinon, le n^e terme de $f(n)$ est égal à 1 et $u_n = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq f(n)_n$, donc $u \neq f(n)$. Ainsi, u n'a pas d'antécédent par f . En conclusion, il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur A , donc A n'est pas dénombrable. $\square$

Corollaire 2.3.13. *Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'ensembles finis ou dénombrables. On suppose que les A_n sont non vides et ne sont pas des singletons. Alors, $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ est infini, non dénombrable.*

Remarque. On pourrait seulement supposer qu'une infinité de A_n ne sont pas des singletons mais cela complique un peu la présentation de la preuve. Par contre, il vaut mieux que tous les A_n soient non vides, sinon leur produit est vide.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, soit $f_n : \{0, 1\} \rightarrow A_n$ une injection. Considérons la fonction $f : E = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ définie comme suit. Pour tout $u \in E$,

$$f(u) = (f_n(u_n))_{n \geq 1}$$

Soient $u, v \in E$. Supposons $f(u) = f(v)$. On a donc pour tout $n \geq 1$, $f_n(u_n) = f_n(v_n)$. Comme f_n est injective, $u_n = v_n$. Ainsi, $u = v$. La fonction f est donc injective. Comme E n'est pas dénombrable, le produit des A_n ne l'est pas non plus. $\square$

2.4 Réunion (bis)

Retour aux réunions d'ensembles finis ou dénombrables. Faisons mieux que la dernière fois. Nous avons montré que la réunion d'un nombre *fini* d'ensembles finis ou dénombrables était finie ou dénombrable. Passons à des réunions infinies dénombrables.

Proposition 2.4.14. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles finis ou dénombrables. Soit $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. L'ensemble A est fini ou dénombrable.*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ une surjection. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow A$ définie par

$$f(m, n) = f_n(m)$$

Soit $a \in A$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A \in A_n$. Comme f_n est surjective, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a = f_n(m) = f(m, n)$. Ainsi, f est surjective. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, A est fini ou dénombrable. $\square$

Remarque. Bien entendu, il n'y a (en ce qui nous concerne) rien à dire sur une réunion *quelconque* d'ensembles finis ou dénombrables. Par exemple, tout ensemble E s'écrit

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$$

L'ensemble E est une réunion de singletons, et donc une réunion d'ensembles finis.

3 Les nombres réels

3.1 La non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$

Il existe de nombreuses démonstrations de la non dénombrabilité de $\mathbb{R}$. Choisissons la plus directe et, à mon avis, la plus élégante.

Proposition 3.1.15. $\mathbb{R}$ est infini, non dénombrable.

Démonstration. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Nous allons montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ différent de tous les a_n . Cela prouvera qu'il n'existe pas de surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$. Soit I_0 un segment non trivial de $\mathbb{R}$ tel que $a_0 \notin I_0$ (par exemple, $I_0 = [a_0 + 1, a_0 + 2]$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons construits des segments $I_0, \dots, I_{n-1}$ non triviaux de $\mathbb{R}$ vérifiant

- $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_{n-1}$
- Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $a_k \notin I_k$.

Découpons I_{n-1} en trois sous-segments de même longueur. Le réel a_n pourrait appartenir à deux de ces trois segments (s'il est une borne commune de deux segments) mais il ne peut pas appartenir aux trois. Appelons I_n le premier segment tel que $a_n \notin I_n$.

Nous avons ainsi construit par récurrence une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés non triviaux telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin I_n$. Soit

$$I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

L'ensemble I est l'intersection d'une suite de segments emboîtés non triviaux, donc $I \neq \emptyset$ ¹. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \notin I_n$, donc $a_n \notin I$. De là, pour tout $x \in I$, x n'est égal à aucun des a_n . $\square$

Remarque. Par notre choix des I_n , la longueur de I_n est égale à $1/3^n$. Lorsque n tend vers l'infini, la longueur de I_n tend vers 0. L'ensemble I est en fait un singleton.

1. Plus généralement, l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides de $\mathbb{R}$ est encore un compact non vide de $\mathbb{R}$.

3.2 Les nombres algébriques

Un nombre réel est *algébrique* s'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Par exemple, tous les rationnels sont algébriques. Le réel $\sqrt{2}$ est algébrique, puisqu'il est racine du polynôme $X^2 - 2$. Le réel $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est aussi algébrique : le lecteur vérifiera que ce réel est racine de $X^4 - 10X^2 + 1$.

Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des nombres algébriques et $\mathcal{T}$ l'ensemble des nombres transcendants. Nous allons montrer que $\mathcal{A}$ est dénombrable et que $\mathcal{T}$ est infini, non dénombrable.

Lemme 3.2.16. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{Z}_n[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré inférieur ou égal à n est dénombrable.*

Démonstration. Soit $f : \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}_n[X]$ définie par

$$f(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

Par l'unicité de l'écriture des polynômes, la fonction f est bijective. L'ensemble $\mathbb{Z}^{n+1}$, produit cartésien de $n+1$ ensembles dénombrables, est dénombrable, donc $\mathbb{Z}_n[X]$ l'est aussi. $\square$

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$, notons $\mathcal{R}(P)$ l'ensemble des racines réelles de P . L'ensemble $\mathcal{R}(P)$ est fini, de cardinal inférieur ou égal au degré de P .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des nombres algébriques qui sont racines d'un polynôme non nul de $\mathbb{Z}_n[X]$.

Lemme 3.2.17. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n$ est fini ou dénombrable.*

Démonstration. On a

$$\mathcal{A}_n = \bigcup_{P \in \mathbb{Z}_n[X] \setminus \{0\}} \mathcal{R}(P)$$

Une réunion dénombrable d'ensembles finis est finie ou dénombrable, d'où le résultat. $\square$

Remarque. On peut évidemment être un peu plus précis : $\mathcal{A}_0 = \emptyset$ et pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}_n$ donc $\mathcal{A}_n$ est dénombrable.

Proposition 3.2.18. *L'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques est dénombrable.*

Démonstration. On a

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n$$

Les $\mathcal{A}_n$ étant finis ou dénombrables, $\mathcal{A}$ l'est aussi. De plus, $\mathcal{A}$ est infini car $\mathbb{Q} \subseteq \mathcal{A}$. $\square$

Proposition 3.2.19. *L'ensemble $\mathcal{T}$ des nombres transcendants est infini, non dénombrable.*

Démonstration. Supposons $\mathcal{T}$ fini ou dénombrable. On a

$$\mathbb{R} = \mathcal{A} \cup \mathcal{T}$$

donc $\mathbb{R}$ est dénombrable, contradiction. $\square$

Remarque. Nous verrons un peu plus loin que si A est une partie dénombrable de $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R} \setminus A \simeq \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}$. La simple existence d'*au moins un* nombre transcendant était en soi non évidente. En montrant que $\mathcal{T} \simeq \mathbb{R}$, nous prouvons que *la plupart* des nombres réels sont transcendants. Cependant, notre preuve ne nous permet pas de donner un seul exemple de nombre transcendant !

3.3 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux points en contient alors une infinité. Nous allons montrer que I est alors « aussi gros » que $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3.20. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points. On a $I \simeq \mathbb{R}$.*

Nous allons procéder en plusieurs étapes.

Lemme 3.3.21. *Tous les segments contenant au moins deux points sont équipotents.*

Démonstration. Soient $a < b$ et $c < d$. Soient $S = [a, b]$ et $S' = [c, d]$. Soient

$$\alpha = \frac{d - c}{b - a} \quad \text{et} \quad \beta = c - \alpha a$$

On vérifie facilement que la fonction affine $x \mapsto \alpha x + \beta$ est une bijection de S sur S' . $\square$

On montre de même qu'il existe des bijections affines entre

- Les intervalles ouverts bornés.
- Les intervalles semi-ouverts bornés.
- Les intervalles $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.
- Les intervalles $]a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.
- Les intervalles $] - \infty, b]$, où $b \in \mathbb{R}$.
- Les intervalles $] - \infty, b[$, où $b \in \mathbb{R}$.

Lemme 3.3.22. $\mathbb{R} \simeq] - 1, 1[$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan x$ est une bijection entre ces deux ensembles. $\square$

Lemme 3.3.23. $\mathbb{R} \simeq]0, +\infty[\simeq]-\infty, 0[$.

Démonstration. La fonction $\exp$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. La fonction $x \mapsto -x$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 0[$. $\square$

Pour l'instant, nous avons prouvé que tous les intervalles ouverts sont équipotents.

Lemme 3.3.24. $[0, +\infty[\simeq [0, 1[\simeq]-1, 0]$.

Démonstration. La fonction $x \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan x$ est une bijection entre les deux premiers ensembles. La fonction $x \mapsto -x$ est une bijection entre les deux derniers ensembles. $\square$

Ainsi, tous les intervalles semi-ouverts sont équipotents. Il nous reste à montrer que, par exemple, $]0, 1[\simeq]0, 1] \simeq [0, 1[\simeq [0, 1]$. Nous allons prouver une de ces équipotences. Les autres sont laissées en exercice, il suffit d'adapter la preuve ci-dessous.

Proposition 3.3.25. $[0, 1] \simeq [0, 1[$.

Démonstration. Soit $A = \{1/n : n \geq 1\}$. Considérons la fonction $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1[$ définie par $f(x) = x$ si $x \notin A$ et $f(x) = x/2$ si $x \in A$. Montrons que f est bijective.

Soit $g : [0, 1[\rightarrow [0, 1]$ définie par $g(x) = x$ si $x \notin A$ et $g(x) = 2x$ si $x \in A$. Soit $x \in [0, 1]$. Si $x \notin A$, alors $g(f(x)) = g(x) = x$. Si $x \in A$, alors $x/2 \in A$, donc $g(f(x)) = g(x/2) = 2(x/2) = x$. Ainsi, $g \circ f = \text{id}_{[0,1]}$. On montre de la même façon que $f \circ g = \text{id}_{[0,1[}$. Ainsi, f est bijective et $f^{-1} = g$. $\square$

3.4 Réels et suites binaires

Nous sommes maintenant en possession de deux ensembles infinis non dénombrables, l'ensemble $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et l'ensemble $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4.26. $\mathbb{R} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Décomposons la preuve de cette proposition en quelques lemmes.

Lemme 3.4.27. *Soit E un ensemble infini non dénombrable. Si A est une partie dénombrable de E , alors $E \simeq E \setminus A$.*

Démonstration. Notons $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ où les a_n sont les éléments distincts de A . Comme E est infini non dénombrable, $E \setminus A$ est un ensemble infini. Il existe donc un ensemble dénombrable B inclus dans $E \setminus A$. Notons $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ où les b_n sont les éléments distincts de B . Remarquons que comme $B \subseteq E \setminus A$, les b_n sont distincts des a_n .

Soit $f : E \rightarrow E \setminus A$ définie comme suit.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = b_{2n}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) = b_{2n+1}$.
- Pour tout $x \in E \setminus (A \cup B)$, $f(x) = x$.

Montrons que f est bijective. Soient $x, y \in E$. Supposons $f(x) = f(y)$. Si x et y appartiennent tous les deux à un des trois ensembles A , B ou $E \setminus (A \cup B)$, on a immédiatement $x = y$. Il reste à montrer que les autres possibilités amènent une contradiction.

- Cas 1, $x \in A$, $y \in B$ (ou le contraire). Il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $x = a_m$ et $y = b_n$. On a alors $b_{2m} = b_{2n+1}$, contradiction.
- Cas 2, $x \in A$, $y \in E \setminus (A \cup B)$ (ou le contraire). Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x = a_m$. On a alors $b_{2m} = y$, contradiction car $y \notin B$.
- Cas 3, $x \in B$, $y \in E \setminus (A \cup B)$ (ou le contraire). Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = b_n$. On a alors $b_{2n+1} = y$, contradiction car $y \notin B$.

Montrons que f est surjective. Soit $y \in E \setminus A$. Si $y \notin B$, alors $y = f(y)$. Si $y \in B$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $y = b_m$. Si $m = 2n$ est pair, alors $y = f(a_n)$. Si $m = 2n + 1$ est impair, alors $y = f(b_n)$. Ainsi, dans tous les cas, y a un antécédent par f . $\square$

Notons A l'ensemble des suites stationnaires de $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et A' l'ensemble des réels $x \in [0, 1[$ de la forme $p/2^n$, où $p, n \in \mathbb{N}$.

Lemme 3.4.28. *A et A' sont dénombrables.*

Démonstration. L'ensemble A' est infini, inclus dans $\mathbb{Q}$, et $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc A' est dénombrable. Passons à A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n^0 = \{a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, a_k = 0\}$$

$$A_n^1 = \{a \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, a_k = 1\}$$

Les ensembles A_n^0 et A_n^1 sont des ensembles finis (de cardinal 2^n) et

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^0 \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n^1$$

d'où la dénombrabilité de A . $\square$

Nous pouvons maintenant prouver notre théorème.

Démonstration. Considérons l'application $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \longrightarrow [0, 1[\setminus A'$ définie par

$$f((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}}$$

Les résultats classiques sur le développement binaire des réels montrent que f est bijective. Ainsi,

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \simeq [0, 1[\setminus A'$$

De là,

$$\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \simeq \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A \simeq [0, 1[\setminus A' \simeq [0, 1[\simeq \mathbb{R}$$

$\square$

3.5 De façon générale, que dire des parties de $\mathbb{R}$?

Dans ce qui précède, nous avons rencontré

- Des parties de $\mathbb{R}$ finies.
- Des parties de $\mathbb{R}$ dénombrables, comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou l'ensemble $\mathcal{A}$ des nombres algébriques.
- Des parties de $\mathbb{R}$ équipotentes à $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathcal{T}$ des nombres transcendants.

Toutes les parties de $\mathbb{R}$ sont-elles de l'un de ces trois types ?

Hypothèse du Continu (CH). Pour tout ensemble infini $A \subseteq \mathbb{R}$, on a $A \simeq \mathbb{N}$ ou $A \simeq \mathbb{R}$.

Citons et commentons deux résultats à ce sujet. Le premier résultat a été démontré par Kurt Gödel (1940). Dans le langage des logiciens, il s'énonce ainsi.

Proposition 3.5.29. $ZFC \not\vdash \neg CH$.

Quelle est la signification de cette proposition ? ZFC est une abréviation pour « théorie des ensembles de Zermelo-Frankel avec axiome du choix et axiome de fondation ». La proposition nous dit que ZFC ne peut pas prouver la négation de CH. Mais bon, cela peut tout simplement vouloir dire que CH est « vraie » ? Eh bien non. Voici un second résultat, démontré par Paul Cohen (1963).

Proposition 3.5.30. $ZFC \not\vdash CH$.

Autrement dit, ZFC ne peut pas non plus prouver CH. En combinant les deux résultats, on obtient que *l'hypothèse du continu est indépendante de ZFC*.