

Variables libres, variables liées

MPSI B - 13 septembre 2021

1 Libre ou lié ?

1.1 Introduction

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Considérons la proposition P suivante :

$$(P) \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$

Cette proposition est vraie lorsque A est majorée. Considérons maintenant la proposition Q suivante :

$$(Q) \exists W \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leq W$$

Les propositions P et Q sont équivalentes, elles signifient exactement la même chose. Considérons enfin la proposition R ci-dessous :

$$(R) \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in B, x \leq M$$

Cela signifie que la partie B est majorée, enfin j'imagine, parce que personne ne m'a dit qui était B . Nous avons là une proposition qui veut dire tout autre chose que la proposition P . Les propositions P et R ne sont pas en général équivalentes.

Ce que nous voyons ici, c'est que dans la proposition P , les variables M et x n'ont pas le même *statut* que la variable A . Remplacer x par t ou M par W ne change pas le sens de la proposition. En revanche, remplacer A par B change tout !

Dans la proposition « $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$ », la variable A est *libre*. Les variables x et M sont *liées*.

Liées, mais par quoi ? Eh bien x est liée par le quantificateur $\forall x$ et M est liée par le quantificateur $\exists M$. Si je change $\exists M$ par $\exists K$ et que je remplace partout la lettre M par la lettre K , je ne change pas le sens de la proposition P . Disons pour faire vite qu'il n'y a pas « réellement » de x ou de M dans la proposition P . *La proposition P ne dépend que de A , et pas de x ni de M .* On peut remplacer les lettres x et M par n'importe quelle (ou presque) autre lettre sans changer le sens de P .

Pourquoi presque ? Que se passe-t-il si je change $\exists M$ en $\exists A$ ou $\exists x$? Là, c'est une catastrophe. Par exemple, « $\exists A \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq A$ » n'a aucun sens et «

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq x$ » en aurait peut-être un, mais ce ne serait certainement pas le sens de la proposition d'origine. Retenons donc

Fait n° 1. Changer le nom d'une variable liée par un autre nom ne change pas le sens de l'expression, pourvu que cet autre nom n'apparaisse pas dans l'expression d'origine.

Fait n° 2. Changer le nom d'une variable libre par un autre change le sens de la proposition.

1.2 Avons-nous bien compris ?

Reprenons notre exemple préféré. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Considérons la propriété

$$(P) \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$$

Seule A est une variable libre. Les lettres x et M sont des variables liées. Nous pourrions appeler cette propriété $P(A)$. Elle ne dépend que de l'ensemble A et signifie que A est majoré.

Creusons un peu. Soit $M \in \mathbb{R}$. Considérons la propriété

$$(Q) \forall x \in A, x \leq M$$

De quelles quantités cette propriété dépend-elle ? De A et de M , les variables libres de la propriété. Nous pourrions appeler cette propriété $Q(A, M)$ et nous aurions alors

$$P(A) \iff \exists M \in \mathbb{R}, Q(A, M)$$

En fait, on a $Q(A, M)$ lorsque A est majoré par M . Creusons encore. Soit $x \in A$. Considérons la propriété

$$(R) x \leq M$$

De quelles quantités cette propriété dépend-elle ? De x et de M , les variables libres de la propriété. Il s'avère que dans cet exemple, A a disparu. Nous pourrions appeler cette propriété $R(x, M)$ et nous aurions alors

$$P(A) \iff \exists M \in \mathbb{R}, Q(A, M) \iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, R(x, M)$$

Bilan. Face à une expression compliquée, il faut toujours bien distinguer dans cette expression les variables liées et les variables libres.

2 D'autres exemples

2.1 Sommes, produits

Dans l'expression

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^p$$

le rédacteur de l'énoncé met l'accent sur le fait que la somme dépend de n . En réalité, elle dépend aussi de p (et nous aurions pu la noter $S_{n,p}$). Et k , alors ? Eh bien k est une variable liée, alors que n et p sont des variables libres.

Au fait, c'est quoi une variable ? Sans entrer dans le fond d'une obscure théorie réservée aux seuls élus, une variable c'est une lettre qu'on peut remplacer par une valeur. Essayons de remplacer n par 5 et p par 1 dans S_n . On obtient

$$\sum_{k=0}^5 k$$

Cette expression a un sens. Elle vaut 15. Essayons maintenant de remplacer k par 5 dans S_n . On obtient

$$\sum_{5=0}^n 5^p$$

C'est au delà de l'absurde. On ne peut pas remplacer k par une valeur. k n'est donc pas une « vraie » variable. k est une variable « muette », elle n'a pas son mot à dire. D'ailleurs elle n'est même pas là, puisqu'on a aussi $S_n = \sum_{j=0}^n j^p$.

2.2 Ensembles

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit

$$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \geq a\}$$

Dans l'expression qui définit E , x est une variable liée et a est une variable libre. Remplacer x par un nombre est absurde. Par exemple, si nous remplaçons x par 5, nous obtenons

$$E = \{5 \in \mathbb{R}, 12 \geq a\}$$

ce qui est totalement incohérent. Par contre, nous pouvons remplacer a par 5 pour obtenir

$$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 3x + 2 \geq 5\}$$

L'ensemble E est un ensemble qui dépend a , mais certainement pas de x , qui n'existe pas vraiment. On peut remplacer x par n'importe quelle autre lettre (sauf a et E). Ainsi, par exemple, on a aussi

$$E = \{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda^2 - 3\lambda + 2 \geq a\}$$

2.3 Intégrales

Pour tout réel x , considérons

$$I(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^4 + 1}$$

L'expression $I(x)$ contient les deux lettres x et t . Qui est libre ? Qui est muet ? C'est facile. Je peux remplacer x par 3 et me demander ce que vaut $\int_0^3 \frac{dt}{t^4 + 1}$. En revanche, je peux difficilement remplacer t par 3 et me demander ce que vaut $\int_0^x \frac{d3}{82}$. Bref, t est une variable muette, et x est une variable libre.

2.4 Fonctions

Considérons la fonction f définie par

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\lambda x) \end{array}$$

Nous voyons dans l'expression qui définit f les lettres λ et x . Quel est leur statut ? λ est une variable libre. Si je remplace λ par 3, j'obtiens

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(3x) \end{array}$$

ce qui est parfaitement cohérent. En revanche, x est une variable liée. Si je remplace x par 3, j'obtiens

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ 3 & \longmapsto & \sin(3\lambda) \end{array}$$

En revanche, puisque x est liée, je peux remplacer x par n'importe quelle lettre autre que f et λ , et écrire par exemple

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sin(\lambda t) \end{array}$$

Ceci est toujours la fonction f , la même que celle du début. Ainsi, f ne « dépend » pas de x , pas plus qu'elle ne « dépend » de t

En revanche et en conclusion, si x est un nombre réel alors $f(x) = \sin(\lambda x)$ et cette fois-ci, x est une variable libre de l'expression $f(x)$. Donc, $f(x)$ dépend de x .

Règle absolue. Il faudra toujours penser à distinguer soigneusement f et $f(x)$ car ces deux expressions ne représentent pas la même chose. On ne dit pas « la fonction $f(x)$ ». On dit « la fonction f ». Confondre les deux est une erreur.