

Les entiers naturels

Marc Lorenzi

2 juillet 2026

1 Les axiomes de Peano

Qu'est-ce qu'un entier naturel ? De façon informelle,

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Que veut-on réellement dire lorsqu'on écrit cela ? Essayons de préciser.

- Avant 0, il n'y a rien.
- Juste après 0, il y a 1.
- Juste avant 1, il y a 0 et seulement 0.
- Juste après 1, il y a 2.
- Juste avant 2, il y a 1 et seulement 1.
- etc.

Il y a un peu plus à dire : je peux atteindre n'importe quel entier en partant de 0 et en faisant un « nombre fini » de sauts, en passant par 1, 2, 3, etc. Évidemment, tout ceci est plutôt vague. Avant la mise en place de la théorie des ensembles au début du XX^e siècle, le mathématicien Giuseppe Peano a présenté en 1889 une axiomatique des entiers naturels. La voici.

Axiome 1. *Il existe*

- un ensemble $\mathbb{N}$ dont les éléments sont appelés les **entiers**,
- un élément 0 de $\mathbb{N}$ appelé **zéro**,
- une fonction $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ appelée la **fonction successeur**,

qui vérifient les propriétés suivantes :

- (1) *Si $m \in \mathbb{N}$ est différent de 0, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = s(n)$.*
- (2) *0 n'est le successeur d'aucun entier.*
- (3) *Si $\mathcal{P}(n)$ est une propriété de l'entier n telle que*
 - $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
 - si n est un entier quelconque et $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(s(n))$ est vraie,*alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers n .*

La propriété numéro 3 s'appelle le *principe de récurrence*.

Notation. Nous noterons $1 = s(0)$. Nous appellerons « un » cet entier. Soyons audacieux et notons $2 = s(1) = s(s(0))$, $3 = s(2) = s(s(s(0)))$ et $4 = s(3) = s(s(s(s(0))))$. Appelons ces entiers « deux », « trois » et « quatre ». Le lecteur téméraire pourra noter

$$9 = s(s(s(s(s(s(s(s(s(0))))))))))$$

et appeler « neuf » ce nouvel entier (peut-être parce qu'il est nouveau?).

2 L'addition

Informellement, si n et m sont deux entiers, alors la somme de n et m est

$$n + m = s(s(s(\dots(s(n))\dots)))$$

où la lettre s apparaît m fois. De façon imagée, pour passer de n à $n + m$ on effectue m sauts successifs dans l'ensemble $\mathbb{N}$. Bien entendu, $n + m$ doit être défini plus rigoureusement. La définition ci-dessous est ce que l'on appelle une *définition par récurrence*.

Définition 1. On définit par récurrence sur m la somme de deux entiers n et m en posant

- (i) $n + 0 = n$.
- (ii) Pour tout entier m , $n + s(m) = s(n + m)$.

Proposition 2. Pour tout entier n , $s(n) = n + 1$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n + 1 = n + s(0) \stackrel{(ii)}{=} s(n + 0) \stackrel{(i)}{=} s(n)$$

□

Proposition 3. $2 + 2 = 4$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= 2 + s(1) \quad \text{par définition de } 2 \\ &= s(2 + 1) \quad \text{par définition de } + \\ &= s(2 + s(0)) \quad \text{par définition de } 1 \\ &= s(s(2 + 0)) \quad \text{par définition de } + \\ &= s(s(2)) \quad \text{par définition de } + \\ &= s(s(s(s(0)))) \quad \text{par définition de } 2 \\ &= 4 \quad \text{par définition de } 4 \end{aligned}$$

□

Exercice. Montrer que $4 + 3 + 2 = 9$. Bon courage !

Le principe de récurrence permet ensuite de démontrer toutes les propriétés de l'addition, comme par exemple la commutativité et l'associativité. Ces démonstrations ne sont pas si évidentes que cela et nous ne les ferons pas.

3 Multiplication

Si n et m sont deux entiers, alors n *multiplié* par m est intuitivement l'addition de n avec lui-même m fois :

$$n \times m = n + n + \dots + n \quad (m \text{ fois})$$

Donnons une définition correcte et exploitable.

Définition 2. On définit par récurrence sur m le produit de deux entiers n et m en posant

$$(i') \quad n \times 0 = 0.$$

$$(ii') \quad \text{Pour tout entier } m, n \times s(m) = n + (n \times m).$$

Remarquons que la définition de la multiplication fait intervenir l'addition.

Proposition 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \times 1 = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n \times 1 = n \times s(0) \underset{(ii')}{=} n + n \times 0 \underset{(i')}{=} n + 0 = n$$

□

Proposition 5. $2 \times 2 = 4$.

Démonstration. Dans les lignes qui suivent, on utilise l'associativité de l'addition.

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 2 \times s(1) \quad \text{par définition de } 2 \\ &= 2 + 2 \times 1 \quad \text{par définition de } \times \\ &= 2 + 2 \times s(0) \quad \text{par définition de } 1 \\ &= 2 + 2 + 2 \times 0 \quad \text{par définition de } \times \\ &= 2 + 2 + 0 \quad \text{par définition de } \times \\ &= 2 + 2 \quad \text{par définition de } + \\ &= 4 \quad \text{par la proposition 3} \end{aligned}$$

□

Exercice. Montrer que $3 \times 3 = 9$.

4 Puissances

Si n et m sont deux entiers, n à la puissance m est grosso modo la multiplication de n avec lui-même m fois :

$$n^m = n \times n \times \dots \times n \quad (m \text{ fois})$$

Plus précisément :

Définition 3. On définit par récurrence sur m la puissance m^e d'un entier n en posant

$$(i'') \quad n^0 = 1.$$

$$(ii'') \quad \text{Pour tout entier } m, n^{s(m)} = n \times n^m.$$

Remarquons que la définition des puissances fait intervenir la multiplication.

Proposition 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^1 = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n^1 = n^{s(0)} =_{(ii'')} n \times n^0 =_{(i'')} n \times 1 = n$$

□

Proposition 7. $2^2 = 4$.

Démonstration. Dans les lignes qui suivent, on utilise l'associativité de la multiplication.

$$\begin{aligned} 2^2 &= 2^{s(1)} \quad \text{par définition de } 2 \\ &= 2 \times 2^1 \quad \text{par définition des puissances} \\ &= 2 \times 2^{s(0)} \quad \text{par définition de } 1 \\ &= 2 \times 2 \times 2^0 \quad \text{par définition des puissances} \\ &= 2 \times 2 \times 1 \quad \text{par définition des puissances} \\ &= 2 \times 2 \quad \text{par la proposition 4} \\ &= 4 \quad \text{par la proposition 5} \end{aligned}$$

□

Exercice. Montrer que $3^2 = 9$. J'aurais bien demandé de montrer que $2^3 = 8$, mais je n'ai jamais dit ce que voulait dire « 8 ».

5 Superpuissances

Je voudrais mettre en évidence une analogie remarquable entre la définition de la multiplication et la définition des puissances. Pour cela, notons plutôt

$$n^m = n \wedge m$$

On a

$$\begin{aligned}n \times s(m) &= n + (n \times m) \\ n \wedge s(m) &= n \times (n \wedge m)\end{aligned}$$

Pour passer de la ligne 1 à la ligne 2, il suffit de faire les transformations $+$ $\longrightarrow$ $\times$ et $\times$ $\longrightarrow$ $\wedge$. On a également les « conditions initiales »

$$\begin{aligned}n \times 0 &= 0 \\ n \wedge 0 &= 1\end{aligned}$$

On a fait ici dans le membre de droite la transformation $0 \longrightarrow 1$. Remarquons que 0 est l'élément neutre de l'addition et 1 est l'élément neutre de la multiplication. Ce n'est pas un hasard.

Pourquoi ne pas recommencer ? Définissons les superpuissances. Pour $n, m \in \mathbb{N}$, notons $n^{[m]}$ (ou aussi $n \otimes m$) l'élevation de n à la superpuissance m . L'idée est de remplacer, dans la définition des puissances, les $\wedge$ par des $\otimes$ et les $\times$ par des $\wedge$. Il faudrait aussi remplacer, dans les conditions initiales, l'élément neutre 1 de la multiplication par l'élément neutre des puissances. Si nous remarquons que $n^1 = n$, nous voyons que le neutre des puissances est 1, le même que le neutre de la multiplication.

Définition 4. On définit par récurrence sur m la superpuissance m^e d'un entier n en posant

$$\begin{aligned}(i''') \quad n^{[0]} &= 1. \\ (ii''') \quad \text{Pour tout entier } m, \quad n^{[s(m)]} &= n^{n^{[m]}}.\end{aligned}$$

Avec la notation $n \otimes m$, cela donne

$$\begin{aligned}n \otimes 0 &= 1 \\ n \otimes s(m) &= n \wedge (n \otimes m)\end{aligned}$$

En reprenant ce que nous avons vu un peu plus haut, nous avons les trois égalités

$$\begin{aligned}n \times s(m) &= n + (n \times m) \\ n \wedge s(m) &= n \times (n \wedge m) \\ n \otimes s(m) &= n \wedge (n \otimes m)\end{aligned}$$

Observer comment les différents symboles se transforment en passant d'une ligne à la suivante ! En ne gardant que les symboles, ces trois lignes deviennent

$$\begin{aligned}\times &= + \times \\ \wedge &= \times \wedge \\ \otimes &= \wedge \otimes\end{aligned}$$

Proposition 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{[1]} = n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$n^{[1]} = n^{[s(0)]} =_{(iii''')} n^{n^{[0]}} =_{(i''')} n^1 = n$$

□

Proposition 9. $2^{[2]} = 4$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} 2^{[2]} &= 2^{[s(1)]} \quad \text{par définition de 2} \\ &= 2^{2^{[1]}} \quad \text{par définition des superpuissances} \\ &= 2^{2^{[s(0)]}} \quad \text{par définition de 1} \\ &= 2^{2^{2^{[0]}}} \quad \text{par définition des superpuissances} \\ &= 2^{2^1} \quad \text{par définition des superpuissances} \\ &= 2^2 \quad \text{par la proposition 6} \\ &= 4 \quad \text{par la proposition 7} \end{aligned}$$

□

Que vaut $2^{[3]}$? Eh bien,

$$2^{[3]} = 2^{2^{[2]}} = 2^4 = 16$$

Puis

$$2^{[4]} = 2^{2^{[3]}} = 2^{16} = 65536$$

et enfin

$$2^{[5]} = 2^{2^{[4]}} = 2^{65536}$$

Ce nombre possède 19729 chiffres en base 10. À raison de 100 chiffres par ligne et 60 lignes par page, il faudrait une peu plus de 3 pages pour l'écrire. Pour prendre encore deux exemples,

$$10^{[2]} = 10^{10} = 10000000000$$

et

$$3^{[3]} = 3^{3^3} = 3^{27} = 7625597484987$$

De façon informelle,

$$n^{[m]} = n^{n^{\cdots n^n}}$$

où l'entier n apparaît m fois.

Conclusion. Ne pourrait-on pas continuer et fabriquer des supersuperpuissances ? Des supersuperpuissances ? Mais oui. En fait, ce n'est jamais fini.