

Le théorème de Jordan–Von Neumann

Marc Lorenzi

16 juin 2021

Résumé

On expose dans ce qui suit le cas réel d'un résultat dû à Jordan et Von Neumann. Dans tout espace préhilbertien réel E , la norme euclidienne vérifie *l'identité du parallélogramme* :

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

La réciproque est également vraie : une norme vérifiant l'identité du parallélogramme est nécessairement une norme euclidienne.

Le sens direct ne présente pas de difficulté.

Proposition 1. *Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'identité du parallélogramme :*

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Démonstration. Notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de E . Soient $x, y \in E$. On a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{cases} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y, x - y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle \end{cases}$$

En ajoutant ces deux égalités, on obtient le résultat. $\square \square$

Voici l'énoncé de la réciproque.

Proposition 2. *[Jordan, von Neumann] Soit E un espace vectoriel réel. On suppose E muni d'une norme $\|\cdot\|$ qui vérifie l'identité du parallélogramme. Alors la norme $\|\cdot\|$ est euclidienne. Plus précisément, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tous $x, y \in E$ par*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

est un produit scalaire sur E et la norme $\|\cdot\|$ est la norme associée à ce produit scalaire.

Il s'agit de démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur E , et que l'on a pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$. Commençons par le plus facile.

Lemme 3. Pour tout $x \in E$, $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

Démonstration.

$$\langle x, x \rangle = \frac{1}{4}(\|2x\|^2 - \|0\|^2) = \|x\|^2$$

□

Corollaire 4. Pour tout $x \in E$,

$$\begin{cases} \langle x, x \rangle \geq 0 \\ \langle x, x \rangle = 0 \text{ si et seulement si } x = 0 \end{cases}$$

Démonstration. Cela résulte immédiatement des propriétés d'une norme.
□

Lemme 5. Pour tous $x, y \in E$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

Démonstration. C'est évident. □

Nous en arrivons à la partie la plus délicate, à savoir la linéarité en la première variable de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Lemme 6. Pour tous $x, y, z \in E$, on a

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|x + z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$$

Démonstration. On utilise de façon répétée l'identité du parallélogramme. Tout d'abord,

$$(\star) \quad 2\|x + y + z\|^2 + 2\|y - z\|^2 = \|x + 2y\|^2 + \|x + 2z\|^2$$

Prenons successivement $z = 0$ et $y = 0$ dans $(\star)$. On obtient

$$\begin{cases} 2\|x + y\|^2 + 2\|y\|^2 &= \|x + 2y\|^2 + \|x\|^2 \\ 2\|x + z\|^2 + 2\|z\|^2 &= \|x\|^2 + \|x + 2z\|^2 \end{cases}$$

Reportons dans $(\star)$ les valeurs de $\|x + 2y\|^2$ et $\|x + 2z\|^2$ que nous donnent les deux égalités ci-dessus, puis divisons par 2. On obtient

$$\|x + y + z\|^2 + \|y - z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \|x + z\|^2 + \|z\|^2$$

Remplaçons enfin dans cette égalité $\|y - z\|^2$ par $2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|y + z\|^2$. Il vient

$$\|x + y + z\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|z\|^2 - \|y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|y\|^2 - \|x\|^2 + \|x + z\|^2 + \|z\|^2$$

d'où, enfin,

$$\|x + y + z\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x + z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2$$

□

L'additivité est maintenant facile à prouver.

Lemme 7. *Pour tous $x, y, z \in E$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.*

Démonstration. On utilise deux fois le lemme précédent avec (x, y, z) et $(x, y, -z)$.

$$\begin{aligned} 4\langle x + y, z \rangle &= \|x + y + z\|^2 - \|x + y - z\|^2 \\ &= (\|x + y\|^2 + \|y + z\|^2 + \|x + z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\ &\quad - (\|x + y\|^2 + \|y - z\|^2 + \|x - z\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 - \|z\|^2) \\ &= (\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2) + (\|y + z\|^2 - \|y - z\|^2) \\ &= 4\langle x, z \rangle + 4\langle y, z \rangle \end{aligned}$$

□

Assez curieusement, ce qui reste à faire est plus subtil. Il nous reste à montrer que pour tous $x, y \in E$ et tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$. On commence par montrer que ceci est vrai pour les rationnels.

Lemme 8. *Pour tous $x, y \in E$ et tout $r \in \mathbb{Q}$, $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$.*

Démonstration. Par le lemme 7, la fonction $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est un morphisme du groupe $(E, +)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Les morphismes de groupes conservant les multiples, on a donc pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et pour tous $x, y \in E$, $\langle px, y \rangle = p\langle x, y \rangle$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$. Posons $r = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On a

$$q\langle rx, y \rangle = \langle qrx, y \rangle = \langle px, y \rangle = p\langle x, y \rangle$$

En divisant par q , on en déduit

$$\langle rx, y \rangle = \frac{p}{q}\langle x, y \rangle = r\langle x, y \rangle$$

□

Notre futur produit scalaire est donc $\mathbb{Q}$ -linéaire en sa première variable. Comme il est symétrique, il est donc $\mathbb{Q}$ -bilinéaire. Nous allons voir que nous avons juste assez pour prouver l'inégalité de Schwarz. Elle nous servira ensuite pour montrer la $\mathbb{R}$ -bilinéarité.

Lemme 9. Pour tous $x, y \in E$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Démonstration. Si $y = 0$, l'inégalité est évidente et se réduit à $0 = 0$. Prenons donc $y \neq 0$. En utilisant la symétrie et la $\mathbb{Q}$ -bilinéarité, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$0 \leq \|x - ry\|^2 = \langle x - ry, x - ry \rangle = \|x\|^2 - 2r \langle x, y \rangle + r^2 \|y\|^2$$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une suite $(r_n)_{n \geq 0}$ de rationnels telle que

$$r_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2}$$

On a pour tout entier n ,

$$0 \leq \|x\|^2 - 2r_n \langle x, y \rangle + r_n^2 \|y\|^2$$

Un passage à la limite dans l'inégalité large ci-dessus donne

$$0 \leq \|x\|^2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^2} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|y\|^4} \|y\|^2$$

ou encore, en multipliant par $\|y\|^2$,

$$0 \leq \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$$

□

Nous pouvons maintenant étendre le résultat du lemme 5 à tous les réels.

Lemme 10. Pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tous $x, y \in E$, $\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$.

Démonstration. Soit $(r_n)_{n \geq 0}$ une suite de rationnels qui tend vers c . On a

$$\begin{aligned} |\langle r_n x, y \rangle - \langle cx, y \rangle| &= |\langle (r_n - c)x, y \rangle| && (\mathbb{Q}\text{-bilinéarité}) \\ &\leq \|(r_n - c)x\| \|y\| && (\text{Inégalité de Schwarz}) \\ &= |r_n - c| \|x\| \|y\| && (\text{Propriétés des normes}) \end{aligned}$$

Faisons tendre n vers l'infini. Le majorant tend vers 0, et donc $\langle r_n x, y \rangle$ tend vers $\langle cx, y \rangle$. Mais par le lemme 6, $\langle r_n x, y \rangle = r_n \langle x, y \rangle$, et cette quantité tend vers $c \langle x, y \rangle$. Par unicité de la limite, on en déduit

$$\langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle$$

□

Il ne reste plus qu'à faire le bilan de ce qui précède.

- Par les lemmes 7 et 10, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire en sa première variable.
- Par le lemme 5, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
- Par les deux premiers points, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire en sa deuxième variable.
- Par le corollaire 4, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est défini positif.
- Par le lemme 3, la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la norme $\| \cdot \|$. □

Références.

- P. Jordan and J. v. Neumann ; On inner products in linear, metric spaces ; Annals of Mathematics, Vol. 36, No. 3 ; July, 1935.
- Anthony W. Knap ; Basic Real Analysis, Exercices Chapitre XII.