

Arcs paramétrés

Marc Lorenzi

18 février 2022

Table des matières

1	Étude affine des arcs	5
1.1	Notion d'arc	5
1.1.1	Arc paramétré	5
1.1.2	Changement de paramétrage	5
1.1.3	Arcs géométriques	6
1.2	Points réguliers, biréguliers, etc.	7
1.2.1	k -régularité	7
1.2.2	Tangente en un point régulier	9
1.2.3	Les arcs au voisinage d'un point d -régulier	9
1.2.4	Points stationnaires	10
2	Longueur	13
2.1	Rectifiabilité	13
2.1.1	Notion de longueur	13
2.1.2	Un arc non rectifiable	15
2.1.3	Arcs $\mathcal{C}^1$	16
2.1.4	Indépendance du paramétrage	18
2.2	Abscisses curvilignes	19
2.2.1	Notion d'abscisse curviligne	19
2.2.2	Paramétrage par s	21
2.3	Calculs pratiques	22
2.3.1	Calcul de l'abscisse curviligne	22
2.3.2	Arcs sous forme fonctionnelle	23
2.3.3	Arcs en coordonnées polaires	23
2.4	Quelques calculs d'abscisses curvilignes	24
2.4.1	La chaînette	24
2.4.2	La parabole	24
2.4.3	Le cercle	25
2.4.4	La cardioïde	25
2.4.5	La spirale d'Archimède	25
2.4.6	La spirale logarithmique	26
2.4.7	La cycloïde	26
2.4.8	L'hélice circulaire droite	27
3	Courbure en dimension 2	29
3.1	Courbure	29
3.1.1	Repère de Frenet	29
3.1.2	Courbure	30

3.1.3	Calculs pratiques	30
3.2	Quelques exemples	32
3.2.1	L'ellipse	32
3.2.2	La parabole	32
3.2.3	La cardioïde	33
3.3	Rayon de courbure	33
3.3.1	Position du support par rapport à un cercle	33
3.3.2	Développée	35
3.3.3	Quelques exemples	35
3.3.4	Développantes	35
3.4	Paramétrage par l'angle polaire	35
3.4.1	Le théorème de relèvement	35
3.4.2	Un nouveau paramètre	36
3.4.3	Quelques formules utiles	36
4	La dimension 3	37
4.1	Courbure et torsion en dimension 3	37
4.1.1	Courbure	37
4.1.2	Torsion	37
4.1.3	Calculs pratiques	39
4.1.4	Un exemple	40
4.2	Courbures en dimension quelconque	41

Chapitre 1

Étude affine des arcs

Dans tout le chapitre, d est un entier naturel supérieur ou égal à 2. I, J désignent des intervalles de $\mathbb{R}$.

1.1 Notion d'arc

1.1.1 Arc paramétré

Définition 1. Un *arc paramétré* est une fonction *continue* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Le *support* de l'arc f est $f(I) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Un arc n'est donc qu'une fonction continue. Très fréquemment, cette fonction possède une régularité supplémentaire. Nous parlerons ainsi d'arc de classe $\mathcal{C}^k$. Sans précision supplémentaire, nous aurons dans ce qui suit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1.1.2 Changement de paramétrage

Définition 2. Un *changement de paramétrage* de classe $\mathcal{C}^k$ est une bijection $\varphi : I \longrightarrow J$ de classe $\mathcal{C}^k$ ainsi que sa réciproque.

Si $k = 0$, la continuité de φ entraîne celle de φ^{-1} . Si $k \geq 1$, φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si φ' ne s'annule pas.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ un changement de paramétrage, lui aussi de classe $\mathcal{C}^k$. La fonction $g = f \circ \varphi^{-1}$ est un arc $J \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^k$ de même support que f .

Nous allons mettre en place un certain nombre de conventions qui nous permettront d'alléger nos calculs. Notons t un élément « générique » de I et u un

élément « générique » de J . Convenons que si dans une même expression apparaissent les lettres t et u , alors $u = \varphi(t)$. Allons plus loin. Notons $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)$ et $\frac{dt}{du} = (\varphi^{-1})'(u)$. Nous avons, avec nos conventions,

$$\begin{aligned} \frac{dt}{du} \frac{du}{dt} &= (\varphi^{-1})'(u) \varphi'(t) \\ &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} \varphi'(t) \\ &= \frac{1}{\varphi'(t)} \varphi'(t) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dans le même genre, en notant $\frac{df}{dt} = f'(t)$ et $\frac{dg}{du} = g'(u)$,

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d(g \circ \varphi)}{dt} \\ &= g'(\varphi(t)) \varphi'(t) \\ &= g'(u) \varphi'(t) \\ &= \frac{dg}{du} \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

Sautons le pas. Si deux arcs se déduisent l'un de l'autre par un changement de paramétrage, nous les noterons de la même manière. C'est le nom du paramètre qui permettra de savoir de quel arc nous parlons. Avec les notations ci-dessus, g est l'arc f « paramétré par u ». Nous noterons ainsi $f(u)$ au lieu de $g(u)$, $\frac{df}{du}$ au lieu de $\frac{dg}{du}$, etc. Ceci permet par exemple d'écrire

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \frac{du}{dt}$$

1.1.3 Arcs géométriques

Deux arcs se déduisant l'un de l'autre par un changement de paramétrage représentent au fond la même « courbe ». Soient f et g deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$.

Définition 3. Soient f et g deux arcs de classe $\mathcal{C}^k$. L'arc g se *déduit* de l'arc f par changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ s'il existe un changement de paramétrage φ de classe $\mathcal{C}^k$ tel que $f = g \circ \varphi$. Nous noterons alors $f \sim g$.

Pour k fixé, notons $\mathbb{P}_k$ l'ensemble des arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$.

$$\mathbb{P}_k = \bigcup_I \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^d)$$

où I décrit l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Proposition 1. *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{P}_k$.*

Démonstration.

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$. Alors, f se déduit de f par id_I .
- Si g se déduit de f par le changement de paramétrage φ , alors f se déduit de g par φ^{-1} . C'est pour garantir la symétrie de la relation $\sim$ que nous imposons aux changements de paramétrage d'avoir une réciproque de classe $\mathcal{C}^k$.
- Si g se déduit de f par le changement de paramétrage φ et h se déduit de g par le changement de paramétrage ψ , alors h se déduit de f par $\psi \circ \varphi$.

□

Définition 4. Notons $\mathbb{G}_k = \mathbb{P}_k / \sim$. Un *arc géométrique* de classe $\mathcal{C}^k$ est un élément de $\mathbb{G}_k$.

Soit $\mathcal{P}$ une propriété des arcs paramétrés. Supposons que si f et g sont deux arcs $\mathcal{C}^k$ tels que $f \sim g$, on a $\mathcal{P}(f)$ si et seulement si $\mathcal{P}(g)$. On peut dans ce cas voir la propriété $\mathcal{P}$ comme une propriété des arcs géométriques. Nous dirons que $\mathcal{P}$ est une *propriété géométrique des arcs*. Nous parlerons de même de *quantités géométriques*. Nous en avons déjà vu un exemple.

Proposition 2. *Le support d'un arc est une quantité géométrique.*

1.2 Points réguliers, biréguliers, etc.

1.2.1 k -régularité

Définition 5. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$, où $k \geq 1$. Soit $t \in I$. L'arc f est *k -régulier* en t lorsque la famille $(f'(t), \dots, f^{(k)}(t))$ est libre.

Un arc régulier est un arc 1-régulier, un arc birégulier est un arc 2-régulier, etc.

Remarquons que si f est k -régulier en t , alors pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, f est aussi j -régulier en t . En effet, toute sous-famille d'une famille libre est libre. De plus, si f est un arc de l'espace $\mathbb{R}^d$, f est au plus d -régulier, puisque toute famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^d$ est de cardinal inférieur ou égal à d .

Proposition 3. *La k -régularité est une propriété géométrique.*

Démonstration. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ deux arcs de classe $\mathcal{C}^k$. Supposons que $f = g \circ \varphi$ où $\varphi : I \rightarrow J$ est un changement de paramétrage $\mathcal{C}^k$. Appelons t et u les éléments génériques de I et J .

Commençons par montrer par récurrence sur j que pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\frac{d^j g}{du^j} = \sum_{i=1}^j \alpha_i \frac{d^i f}{dt^i}$$

où les α_i sont des fonctions de t (ou de u , avec nos conventions) et $\alpha_j = \left(\frac{dt}{du}\right)^j$.

- Tout d'abord,

$$\frac{dg}{du} = \frac{dt}{du} \frac{df}{dt}$$

- Soit $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$. Supposons la propriété vérifiée pour j . On a donc

$$\frac{d^j g}{du^j} = \sum_{i=1}^j \alpha_i \frac{d^i f}{dt^i}$$

où $\alpha_j = \left(\frac{dt}{du}\right)^j$. En dérivant par rapport à u , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^{j+1} g}{du^{j+1}} &= \frac{dt}{du} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^j \alpha_i \frac{d^i f}{dt^i} \right) \\ &= \frac{dt}{du} \left(\sum_{i=1}^j \alpha_i \frac{d^{i+1} f}{dt^{i+1}} + \sum_{i=1}^j \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{d^i f}{dt^i} \right) \\ &= \frac{dt}{du} \left(\sum_{i=2}^{j+1} \alpha_{i-1} \frac{d^i f}{dt^i} + \sum_{i=1}^j \frac{d\alpha_i}{dt} \frac{d^i f}{dt^i} \right) \\ &= \alpha_j \frac{dt}{du} \frac{d^{j+1} f}{dt^{j+1}} + \sum_{i=2}^j \frac{dt}{du} \left(\alpha_{i-1} + \frac{d\alpha_i}{dt} \right) \frac{d^i f}{dt^i} + \frac{dt}{du} \frac{d\alpha_1}{dt} \frac{df}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{j+1} \beta_i \frac{d^i f}{dt^i} \end{aligned}$$

où

$$\beta_{j+1} = \frac{dt}{du} \alpha_j = \left(\frac{dt}{du}\right)^{j+1}$$

Les vecteurs de la famille $\left(\frac{d^j g}{du^j}\right)_{1 \leq j \leq k}$ sont donc combinaisons linéaires de ceux de la famille $\left(\frac{d^j f}{dt^j}\right)_{1 \leq j \leq k}$. Par ailleurs, $\frac{dt}{du} \neq 0$. Une récurrence facile montre que les vecteurs de la famille $\left(\frac{d^j f}{dt^j}\right)_{1 \leq j \leq k}$ sont combinaisons linéaires de ceux de la famille $\left(\frac{d^j g}{du^j}\right)_{1 \leq j \leq k}$. Ainsi, les deux familles ont même cardinal et même rang. L'une est libre si et seulement si l'autre est libre. $\square$

1.2.2 Tangente en un point régulier

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc $\mathcal{C}^1$. Soit $t \in I$. Supposons f régulier en t . Donnons-nous un réel h assez petit pour que $t + h \in I$. La formule de Taylor-Young donne

$$f(t + h) = f(t) + hf'(t) + o(h)$$

Notons $u = f'(t)$. Par la régularité de f en t , le vecteur u n'est pas nul. Considérons une base $(u, w_2, \dots, w_d)$ de $\mathbb{R}^d$ dont le premier vecteur est u . La quantité $o(h)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ que l'on peut mettre sous la forme

$$o(h)u + \sum_{j=2}^d o(h)w_j$$

Ainsi,

$$f(t + h) = f(t) + (h + o(h))u + \sum_{j=2}^d o(h)w_j$$

Notons $A = f(t)$ et $M = f(t + h)$. On a, par l'égalité ci-dessus,

$$\overrightarrow{AM} = hu + o(h) \sim hu$$

En particulier, pour tout h non nul assez petit, $\overrightarrow{AM} \neq 0$. Un vecteur directeur de la droite (AM) est

$$\frac{1}{h}\overrightarrow{AM} = u + o(1)$$

et cette quantité tend vers u lorsque h tend vers 0. Ainsi, le support de f possède une tangente au point A , qui est la droite dirigée par $f'(t)$.

Dans le cas où $d = 2$, il est facile d'obtenir une équation cartésienne de cette tangente. Notons $f(t) = (x(t), y(t))$. Un point (X, Y) est sur la tangente si et seulement si

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & x'(t) \\ Y - y(t) & y'(t) \end{vmatrix} = 0$$

1.2.3 Les arcs au voisinage d'un point d -régulier

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc $\mathcal{C}^d$. Soit $t \in I$. Supposons f d -régulier en t . Notons pour $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $u_j = f^{(j)}(t)$. La famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_d)$ est une base de $\mathbb{R}^d$.

Donnons-nous un réel h assez petit pour que $t + h \in I$. La formule de Taylor-Young donne

$$f(t + h) = f(t) + \sum_{j=1}^d \frac{h^j}{j!} u_j + o(h^d)$$

La quantité $o(h^d)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^d$ que l'on peut mettre sous la forme

$$\sum_{j=1}^d o(h^d)u_j$$

Ainsi,

$$f(t+h) = f(t) + \sum_{j=1}^d \left(\frac{h^j}{j!} + o(h^d) \right) u_j$$

Notons $A = f(t)$ et $M = f(t+h)$. Le développement limité ci-dessus donne un équivalent des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.2.4 Points stationnaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, où $k \geq 1$. Soit $t \in I$. Le point $M = f(t)$ du support de f est *stationnaire* lorsque $f'(t) = 0$, c'est à dire lorsqu'il n'est pas régulier. Rappelons que la régularité est une propriété géométrique. La stationnarité est donc aussi une propriété géométrique.

Nous nous proposons d'étudier le support de l'arc f au voisinage d'un point de paramètre $t \in I$. Nous allons faire sur f les deux hypothèses suivantes

- Il existe un entier $1 \leq p \leq k$ tel que $f^{(p)}(t) \neq 0$.
- Il existe un entier $p < q \leq k$ tel que la famille $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ soit libre.

Nous prendrons les deux entiers p et q minimaux. Dit autrement,

- $f'(t) = \dots = f^{(p-1)}(t) = 0$.
- $f^{(p)}(t) \neq 0$.
- $f^{(p+1)}(t), \dots, f^{(q-1)}(t)$ sont des vecteurs colinéaires à $f^{(p)}(t)$.
- La famille $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ est libre.

Posons $u = \frac{1}{p!} f^{(p)}(t)$ et $v = \frac{1}{q!} f^{(q)}(t)$.

Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $t+h \in I$. Un développement limité de f en t à l'ordre q donne

$$\begin{aligned} f(t+h) &= f(t) + \sum_{k=p}^q \frac{1}{k!} h^k f^{(k)}(t) + o(h^q) \\ &= f(t) + (h^p + o(h^p))u + (h^q + o(h^q))v + o(h^q)w \end{aligned}$$

où le vecteur w est tel que la famille (u, v, w) est libre. De là,

$$f(t+h) - f(t) = (h^p + o(h^p))u + (h^q + o(h^q))v + o(h^q)w$$

Pour tout $h \neq 0$ suffisamment petit, une division par h^p donne

$$\Delta = \frac{f(t+h) - f(t)}{h^p} = (1 + o(1))u + o(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$$

Le vecteur Δ est un vecteur directeur de la droite passant par $f(t)$ et $f(t+h)$. Ainsi, le support de f possède une tangente au point $f(t)$, dirigée par le vecteur u . Déterminons maintenant la position du support par rapport à cette tangente.

Considérons une base $\mathcal{B} = (u_1 = u, u_2 = v, u_3, \dots, u_d)$ de $\mathbb{R}^d$ dont les deux premiers vecteurs sont u et v . On a

$$f(t+h) = f(t) + \alpha u_1 + \beta u_2 + \sum_{k=3}^d o(h^q) u_k$$

où $\alpha = h^p + o(h^p)$ et $\beta = h^q + o(h^q)$.

Pour $h > 0$ suffisamment petit, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Lorsque $h < 0$, 4 cas sont à considérer.

- p est impair et q est pair. Pour $h < 0$ assez petit, $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Le support de f est localement du côté du vecteur v . Ceci arrive par exemple lorsque $p = 1$ et $q = 2$, c'est à dire lorsqu'on a un point birégulier.
- p est impair et q est impair. Pour $h < 0$ assez petit, $\alpha < 0$ et $\beta < 0$. Le support de f change de côté au passage en $f(t)$. On a un point d'inflexion.
- p est pair et q est impair. Pour $h < 0$ assez petit, $\alpha > 0$ et $\beta < 0$. Le support de f reste localement du même côté du vecteur v mais passe d'un côté de u à l'autre côté. On a un point de rebroussement de première espèce.
- p est pair et q est pair. Pour $h < 0$ assez petit, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Le support de f reste localement du même côté du vecteur v et du vecteur u . On a un point de rebroussement de deuxième espèce.

Chapitre 2

Longueur

2.1 Rectifiabilité

2.1.1 Notion de longueur

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. À chaque subdivision $\sigma = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$, on associe la quantité

$$L(f, a, b, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\|$$

Proposition 4. Soient σ_1 et σ_2 deux subdivisions du segment $[a, b]$. On suppose que $[\sigma_1] \subseteq [\sigma_2]$. Alors,

$$L(f, a, b, \sigma_1) \leq L(f, a, b, \sigma_2)$$

Démonstration. Supposons d'abord que le support de σ_2 contient un seul point de plus, u , que celui de σ_1 . Il existe deux points successifs t, t' de σ_1 tels que t, u, t' soient successifs dans σ_2 . On a alors

$$\begin{aligned} L(f, a, b, \sigma_2) &= L(f, a, b, \sigma_1) + \|f(u) - f(t)\| \\ &\quad + \|f(t') - f(u)\| - \|f(t) - f(u)\| \\ &\geq L(f, a, b, \sigma_1) \end{aligned}$$

On termine par une récurrence immédiate sur le cardinal de $[\sigma_2] - [\sigma_1]$. $\square$

Les quantités $L(f, a, b, \sigma)$ deviennent ainsi de plus en plus grandes lorsqu'on rajoute des points aux subdivisions.

Définition 6. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. La *longueur* de f sur $[a, b]$ est

$$L(f, a, b) = \sup\{L(f, a, b, \sigma) : \sigma \in \mathcal{S}([a, b])\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

L'arc f est *rectifiable* sur $[a, b]$ si $L(f, a, b)$ est fini.

L'arc f est *localement rectifiable* sur I si pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, f est rectifiable sur $[a, b]$. La longueur de f sur I est alors

$$L(f, I) = \sup\{L(f, a, b) : a, b \in I, a < b\}$$

Si cette longueur est finie, l'arc f est *rectifiable* sur I .

Faisons deux conventions.

- Pour tout $a \in I$, f est rectifiable sur le singleton $\{a\}$, et $L(f, a, a) = 0$.
- Pour tous $a, b \in I$ tels que $a < b$, $L(f, b, a) = -L(f, a, b)$.

Proposition 5. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré. Soient $a, c, b \in I$ tels que $a \leq c \leq b$.

- $L(f, a, c) + L(f, c, b) = L(f, a, b)$.
- f est rectifiable sur $[a, b]$ si et seulement si f est rectifiable sur $[a, c]$ et $[c, b]$.

Démonstration. Si deux des trois réels a, b, c sont égaux, la propriété est évidente. Supposons donc $a < c < b$. Montrons tout d'abord le premier point. Dans l'égalité à montrer, on convient évidemment que pour tout $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $+\infty + x = +\infty$.

Soient σ_1 une subdivision de $[a, c]$ et σ_2 une subdivision de $[c, b]$. $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision de $[a, b]$, et on a facilement

$$L(f, a, c, \sigma_1) + L(f, c, b, \sigma_2) = L(f, a, b, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq L(f, a, b)$$

De là,

$$L(f, a, c, \sigma_1) \leq L(f, a, b) - L(f, c, b, \sigma_2)$$

On en déduit que

$$L(f, a, c) \leq L(f, a, b) - L(f, c, b, \sigma_2)$$

Si $L(f, a, c) = +\infty$, l'inégalité ci-dessus prouve que $L(f, a, b) = +\infty$. L'égalité à montrer est alors évidente. Sinon, pour toute subdivision σ_2 de $[c, b]$,

$$L(f, c, b, \sigma_2) \leq L(f, a, b) - L(f, a, c)$$

et donc

$$L(f, c, b) \leq L(f, a, b) - L(f, a, c)$$

d'où

$$L(f, a, c) + L(f, c, b) \leq L(f, a, b)$$

Inversement, soit σ une subdivision de $[a, b]$. Soit σ' la subdivision obtenue en rajoutant éventuellement le point c à σ . De façon plus formelle,

$$\sigma' = \langle [\sigma] \cup \{c\} \rangle$$

On a alors $\sigma' = \sigma_1 \cup \sigma_2$ où $\sigma_1 \in \mathcal{S}([a, c])$ et $\sigma_2 \in \mathcal{S}([c, b])$, et

$$L(f, a, b, \sigma) \leq L(f, a, b, \sigma') = L(f, a, c, \sigma_1) + L(f, c, b, \sigma_2)$$

d'où

$$L(f, a, b, \sigma) \leq L(f, a, c) + L(f, c, b)$$

On en déduit que

$$L(f, a, b) \leq L(f, a, c) + L(f, c, b)$$

Montrons maintenant le second point.

- Supposons $L(f, a, b) < +\infty$. On a donc $L(f, a, c) + L(f, c, b) < +\infty$, d'où $L(f, a, c) < +\infty$ et $L(f, c, b) < +\infty$.
- Inversement, si $L(f, a, c) < +\infty$ et $L(f, c, b) < +\infty$, alors $L(f, a, b) = L(f, a, c) + L(f, c, b) < +\infty$.

□

Remarque. Avec les conventions que nous avons faites, l'égalité $L(f, a, b) = L(f, a, c) + L(f, c, b)$ est vraie pour tous $a, b, c \in I$, *sauf* dans les cas d'indétermination du type $\infty - \infty$. Par exemple, si $a < b < c$ et $L(f, b, c) = +\infty$, alors on a aussi $L(f, a, c) = +\infty$. Cela ne permet évidemment pas de conclure quant à la valeur de $L(f, a, b)$, qui peut être finie ou infinie.

Proposition 6. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc localement rectifiable. Soient $a, b \in I$. Alors, $L(f, a, b) = 0$ si et seulement si f est constante sur $[a, b]$.

Démonstration. Prenons le cas où $a < b$.

Supposons f constante sur $[a, b]$. Alors, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a $L(f, a, b, \sigma) = 0$, d'où $L(f, a, b) = 0$.

Inversement, supposons $L(f, a, b) = 0$. Soit $t \in]a, b]$. Soit $\sigma = (a, t) \in \mathcal{S}([a, t])$. On a

$$0 = L(f, a, t, \sigma) = \|f(t) - f(a)\| \leq L(f, a, t) \leq L(f, a, b) = 0$$

Ainsi, $f(t) = f(a)$. □

2.1.2 Un arc non rectifiable

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t, \psi(t))$ où $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie comme suit.

- $\psi(0) = 0$.
- Pour tout entier $n \geq 1$, $\psi(\frac{1}{n}) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.
- Pour tout $n \geq 1$, ψ est affine sur l'intervalle $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$.

Soit $n \geq 1$. Considérons la subdivision de $[0, 1]$

$$\sigma_n = (t_k)_{0 \leq k \leq n} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, 1\right)$$

On a donc $t_0 = 0$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_k = \frac{1}{n+1-k}$. De là,

$$\|f(t_1) - f(t_0)\|^2 = \frac{1}{n^2}$$

et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\|^2 &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{(-1)^{n-k+1}}{n-k} - \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \right)^2 \\ &= \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{n-k+1} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{(n-k)^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$L(f, 0, 1, \sigma_n) \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

Les quantités $L(f, 0, 1, \sigma_n)$ ne sont pas majorées, et donc l'arc f n'est pas rectifiable. Ainsi,

Proposition 7. *Il existe des arcs $\mathcal{C}^0$ non rectifiables.*

En revanche, les arcs $\mathcal{C}^1$ sont localement rectifiables.

2.1.3 Arcs $\mathcal{C}^1$

Proposition 8. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f est localement rectifiable sur I . Pour tous $a, b \in I$, on a*

$$L(f, a, b) = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Démonstration. Si $a = b$, c'est évident. Avec les conventions faites, il suffit de considérer le cas où $a < b$. Soit $\sigma = (t_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{S}([a, b])$. On a

$$\begin{aligned} L(f, a, b, \sigma) &= \sum_{k=0}^{n-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f'(t) dt \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|f'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \|f'(t)\| dt \end{aligned}$$

On vient d'établir une inégalité ainsi que la rectifiabilité de f sur $[a, b]$. De plus,

$$L(f) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

Soit $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in [a, b]$ par

$$\varphi(t) = L(f, a, t)$$

Soient $t \in [a, b[$ et $h > 0$ suffisamment petit pour que $t + h \in [a, b]$. On a

$$\varphi(t + h) = L(f, a, t + h) = L(f, a, t) + L(f, t, t + h)$$

d'où

$$\varphi(t + h) - \varphi(t) \leq \int_t^{t+h} \|f'(t)\| dt$$

d'après le sens direct.

De plus, en considérant la subdivision $\sigma = (t, t + h)$ de l'intervalle $[t, t + h]$, on a

$$\|f(t + h) - f(t)\| \leq L(f, t, t + h) = \varphi(t + h) - \varphi(t)$$

Ainsi, en divisant par h (on rappelle que $h > 0$) :

$$\left\| \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \right\| \leq \frac{\varphi(t + h) - \varphi(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f'(t)\| dt$$

Le minorant tend vers $\|f'(t)\|$ lorsque h tend vers 0. Le majorant aussi, en vertu de la continuité de $\|f'\|$ (inégalité de la moyenne). Ainsi, φ est dérivable à droite en t , et

$$\varphi'_d(t) = \|f'(t)\|$$

Il en est de même à gauche de t . On conclut donc

$$L(f, a, b) = \varphi(b) = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt$$

□

2.1.4 Indépendance du paramétrage

La notion de longueur est géométrique, elle ne dépend pas du paramétrage choisi.

Proposition 9. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc paramétré. Soit $\varphi : I \rightarrow J$ un changement de paramétrage. Soit $g : J \rightarrow \mathbb{R}^d$ défini par $f = g \circ \varphi$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Soit $c = \varphi(a)$ et $d = \varphi(b)$.

L'arc f est rectifiable sur $[a, b]$ si et seulement si l'arc g est rectifiable sur $[c, d]$ et on a

$$L(f, a, b) = L(g, c, d)$$

Démonstration. Supposons f rectifiable sur $[a, b]$. Soit $\sigma' = (t'_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{S}([c, d])$. L'application φ étant bijective et strictement croissante, on a pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $t'_k = \varphi(t_k)$ où $\sigma = (t_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{S}([a, b])$. On a alors

$$\begin{aligned} L(g, c, d, \sigma') &= \sum_{k=0}^{n-1} \|g(\varphi(t_{k+1})) - g(\varphi(t_k))\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \|f(t_{k+1}) - f(t_k)\| \\ &= L(f, a, b, \sigma) \\ &\leq L(f, a, b) \end{aligned}$$

L'arc g est donc rectifiable sur $[c, d]$ et $L(g, c, d) \leq L(f, a, b)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons une subdivision $\sigma = (t_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{S}([a, b])$ telle que $L(f, a, b, \sigma) \geq L(f, a, b) - \varepsilon$. Soit $\sigma' = (\varphi(t_k))_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{S}([c, d])$. Le calcul précédent montre que

$$L(f, a, b) - \varepsilon \leq L(f, a, b, \sigma) = L(g, c, d, \sigma') \leq L(g, c, d)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte

$$L(f, a, b) \leq L(g, c, d)$$

Si l'on suppose g rectifiable, le même raisonnement avec φ^{-1} à la place de φ montre que f est rectifiable sur $[a, b]$. $\square$

Remarque. Pour des arcs de classe $\mathcal{C}^1$, une démonstration plus directe est possible. Tout d'abord, la rectifiabilité est acquise *a priori*. De plus,

$$L(f, a, b) = \int_a^b \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|g'(\varphi(t))\| \varphi'(t) dt = \int_c^d \|g'(u)\| du$$

en posant $u = \varphi(t)$. D'où $L(f, a, b) = L(g, c, d)$.

2.2 Abscisses curvilignes

2.2.1 Notion d'abscisse curviligne

Définition 7. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc localement rectifiable. On appelle *abscisse curviligne* le long de f toute fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant pour tous $t, t' \in I$ tels que $t \leq t'$,

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| = L(f, t, t')$$

Proposition 10. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc localement rectifiable. Soit $a \in I$. La fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in I$ par

$$\varphi(t) = L(f, a, t)$$

est une abscisse curviligne le long de f .

Démonstration. Soient $t, t' \in I$. On a

$$L(f, a, t) + L(f, t, t') = L(f, a, t')$$

et donc

$$\varphi(t') - \varphi(t) = L(f, t, t')$$

De là, si $t \leq t'$,

$$|\varphi(t') - \varphi(t)| = |L(f, t, t')| = L(f, t, t')$$

Il reste à prouver que φ est continue sur I . Soit $t \in I$. Supposons que t n'est pas la borne supérieure de I . Tout d'abord, φ est croissante, donc φ a une limite à droite en t . Appelons ℓ cette limite. Par la croissance de φ ,

$$\varphi(t) \leq \ell$$

Montrons l'inégalité inverse. Soit b un élément de I tel que $t < b$. Soit $\sigma = (t_k)_{0 \leq k \leq n}$ une subdivision de $[t, b]$. Soit $u \in]t, t_1[$. Soit $\sigma' = (t, u, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}([t, b])$. Soit $\sigma'' = (u, t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}([u, b])$. On a

$$\begin{aligned} L(f, t, b, \sigma) &\leq L(f, t, b, \sigma') = \|f(u) - f(t)\| + L(f, u, b, \sigma'') \\ &\leq \|f(u) - f(t)\| + L(f, u, b) \\ &= \|f(u) - f(t)\| + \varphi(b) - \varphi(u) \end{aligned}$$

Lorsque u tend vers t , $f(u)$ tend vers $f(t)$ car f est continue en t . De plus, $\varphi(u)$ tend vers ℓ . On a donc pour toute subdivision σ de $[t, b]$,

$$L(f, t, b, \sigma) \leq \varphi(b) - \ell$$

De là,

$$L(f, t, b) \leq \varphi(b) - \ell$$

c'est à dire

$$\varphi(b) - \varphi(t) \leq \varphi(b) - \ell$$

ou encore $\varphi(t) \geq \ell$. Ainsi,

$$\varphi(t) = \ell$$

et donc φ est continue à droite en t . De même, si t n'est pas la borne inférieure de I , une démonstration analogue montre que φ est continue à gauche en t . $\square$

Proposition 11. *Soit φ une abscisse curviligne le long de l'arc localement rectifiable $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, $k + \varepsilon\varphi$ est aussi une abscisse curviligne le long de f .*

Démonstration. Posons $\psi = k + \varepsilon\varphi$. Pour tous $t, t' \in I$,

$$\psi(t') - \psi(t) = \varepsilon(\varphi(t') - \varphi(t))$$

d'où le résultat. $\square$

Il reste à se demander si d'autres fonctions que celles-ci peuvent être des abscisses curvilignes. La réponse est non.

Proposition 12. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc localement rectifiable. Soient $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux abscisses curvilignes le long de f . Alors il existe un réel k et un réel $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $t \in I$,*

$$\varphi(t) = k + \varepsilon\psi(t)$$

Démonstration. Si φ est constante, alors f est constante, donc ψ aussi, d'où le résultat. Supposons donc φ non constante. Soit $a \in I$. Notons

$$I' = \{t \in I : \varphi(t) \neq \varphi(a)\}$$

Soit $\Delta : I' \rightarrow \{-1, 1\}$ définie pour tout $t \in I'$ par

$$\Delta(t) = \frac{\psi(t) - \psi(a)}{\varphi(t) - \varphi(a)}$$

Supposons un instant qu'il existe $t', t'' \in I'$ tels que $\Delta(t') \neq \Delta(t'')$. On a donc par exemple $\Delta(t') = 1$ et $\Delta(t'') = -1$. De là,

$$\psi(t') = \psi(a) + \varphi(t') - \varphi(a)$$

$$\psi(t'') = \psi(a) - \varphi(t'') + \varphi(a)$$

Il en résulte

$$\psi(t') - \psi(t'') = \varphi(t')\varphi(t'') - 2\varphi(a)$$

Comme φ et ψ sont deux abscisses curvilignes le long de f , on a

$$|\psi(t') - \psi(t'')| = |\varphi(t') - \varphi(t'')|$$

Ainsi,

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| = |\varphi(t') - \varphi(a) + \varphi(t'') - \varphi(a)|$$

Les deux nombres dans les valeurs absolues sont donc égaux ou opposés. Deux cas à considérer.

- S'ils sont égaux, alors $\varphi(t'') = \varphi(a)$, c'est impossible car $t'' \in I'$.
- S'ils sont opposés, alors $\varphi(t') = \varphi(a)$, c'est également impossible.

En conclusion, Δ est constante sur I' . Il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que pour tout $t \in I'$, $\Delta(t) = \varepsilon$, c'est à dire

$$\psi(t) - \psi(a) = \varepsilon\varphi(t) - \varepsilon\varphi(a)$$

En posant $k = \psi(a) - \varepsilon\varphi(a)$, on a donc pour tout $t \in I'$

$$\psi(t) = k + \varepsilon\varphi(t)$$

On termine en remarquant que si $t \in I \setminus I'$, alors $\varphi(t) = \varphi(a)$ et donc

$$k + \varepsilon\varphi(t) = \psi(a) - \varepsilon\varphi(a) + \varepsilon\varphi(a) = \psi(a)$$

De plus,

$$|\psi(t) - \psi(a)| = |\varphi(t) - \varphi(a)| = 0$$

et don $\psi(t) = \psi(a)$. Ainsi,

$$\psi = k + \varepsilon\varphi$$

□

2.2.2 Paramétrage par s

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc localement rectifiable de classe $\mathcal{C}^k$. Soit φ une abscisse curviligne le long de f . Nous avons vu plus haut que φ est continue. La fonction φ est donc une surjection continue de I sur l'intervalle $J = \varphi(I)$. La question qui se pose est la suivante : à quelle condition sur f la fonction φ est-elle un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$? Commençons par le cas $k = 0$.

Proposition 13. *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc rectifiable de classe $\mathcal{C}^0$. Soit φ une abscisse curviligne le long de f . On a équivalence entre*

- *f n'est constante sur aucun segment non trivial inclus dans I .*
- *φ est un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^0$.*

Démonstration. Supposons que f est constante sur $[a, b] \subset I$, où $a < b$. On a alors $|\varphi(b) - \varphi(a)| = L(f, a, b) = 0$. De là, $\varphi(a) = \varphi(b)$, donc φ n'est pas injectif. Ce n'est donc pas un changement de paramétrage.

Supposons que f n'est constante sur aucun segment non trivial inclus dans I . Soient $a, b \in I$ tels que $a \neq b$, par exemple $a < b$. On a

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| = L(f, a, b) > 0$$

et donc $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Ainsi, φ est injectif. φ est donc une bijection continue de I sur $J = \varphi(I)$. La fonction φ^{-1} est automatiquement continue, φ est donc un changement de paramétrage. $\square$

Passons au cas $k \geq 1$.

Proposition 14. *Soit $k \geq 1$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$. Soit φ une abscisse curviligne le long de f . On a équivalence entre*

- *f est un arc régulier.*
- *φ est un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$.*

Démonstration. Soit $a \in I$. Il existe $k \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tels que pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = k + \varepsilon \int_a^t \|f'\|$$

La fonction φ est donc dérivable sur I , et

$$\varphi' = \varepsilon \|f'\|$$

Supposons que f est régulier. Comme f' ne s'annule pas, φ' est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I , donc φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I . De plus, φ' ne s'annule pas, donc φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J = \varphi(I)$.

Inversement, si f n'est pas régulier, il existe $t \in I$ tel que $\varphi'(t) = \varepsilon \|f'(t)\| = 0$. La fonction φ^{-1} n'est alors pas dérivable en $u = \varphi(t)$, donc φ n'est pas un changement de paramétrage $\mathcal{C}^k$. $\square$

2.3 Calculs pratiques

On suppose ici que $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme euclidienne canonique.

2.3.1 Calcul de l'abscisse curviligne

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ où $k \geq 1$. On a pour tout $t \in I$,

$$f(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$$

où les $x_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. On a alors

$$\frac{ds}{dt} = \varepsilon \sqrt{\sum_{i=1}^d x_i'(t)^2}$$

ou encore

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^d \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2$$

En abrégé,

$$ds^2 = \sum_{i=1}^d dx_i^2$$

Dans le cas où $d = 2$ (arc plan), l'arc f est parfois donné sous la forme d'une fonction $x \mapsto F(x)$ ou encore en coordonnées polaires. Examinons ce que deviennent les formules dans ces deux cas.

2.3.2 Arcs sous forme fonctionnelle

Soit $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction F correspond à l'arc paramétré $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini pour tout $t \in I$ par

$$f(t) = (t, F(t))$$

On a donc

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 1 + F'(t)^2$$

2.3.3 Arcs en coordonnées polaires

Soient $\rho : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Ces deux fonctions décrivent un arc $f = (x, y)$ défini, pour tout $t \in I$, par

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y(t) = \rho(t) \sin \theta(t) \end{cases}$$

Pour tout réel θ , soient $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ et $v(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. On a $\frac{du}{d\theta} = v$ et $\frac{dv}{d\theta} = -u$. De plus, pour tout $t \in I$,

$$f(t) = \rho(t)u(\theta(t))$$

De là

$$f'(t) = \rho'(t)u(\theta(t)) + \rho(t)\theta'(t)v(\theta(t))$$

et donc, puisque la famille (u, v) est orthonormée,

$$\|f'(t)\|^2 = \rho'(t)^2 + \rho(t)^2\theta'(t)^2$$

En abrégé,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

ou encore, plus synthétiquement,

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2$$

Un cas particulier fréquent est celui où $\theta = t$. On a alors

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + \rho^2$$

2.4 Quelques calculs d'abscisses curvilignes

Dans tous les exemples ci-dessous, nous prendrons des abscisses curvilignes croissantes en fonction du paramètre. Dit autrement, nous choisirons $\varepsilon = 1$ dans les formules. Nous supposerons également que $\mathbb{R}^d$ est muni de la norme euclidienne canonique. Dans tous les exemples sauf un, on se place en dimension $d = 2$.

2.4.1 La chaînette

Soit $a > 0$. Considérons la chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ où $x \in \mathbb{R}$. Prenons $x = 0$ pour origine des abscisses curvilignes. On a alors

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{t}{a}} dt = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{t}{a} dt = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}$$

2.4.2 La parabole

Soit $p > 0$. Considérons la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Cette courbe peut être paramétrée par

$$f(t) = (2pt^2, 2pt)$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a pour tout réel t

$$f'(t) = (4pt, 2p)$$

et donc

$$\|f'(t)\| = 2p\sqrt{1 + 4t^2}$$

Prenons $t = 0$ pour origine des abscisses curvilignes. On a alors

$$s = 2p \int_0^t \sqrt{1 + 4u^2} du$$

Posons $u = \frac{1}{2} \operatorname{sh} v$. Il vient

$$\begin{aligned} s &= p \int_0^{\operatorname{argsh} 2t} \operatorname{ch}^2 v dv \\ &= \frac{p}{2} \int_0^{\operatorname{argsh} 2t} (1 + \operatorname{ch} 2v) dv \\ &= \frac{p}{2} \left[v + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2v \right]_0^{\operatorname{argsh} 2t} \\ &= \frac{p}{2} \left[v + \operatorname{sh} v \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v} \right]_0^{\operatorname{argsh} 2t} \\ &= \frac{p}{2} \left(\operatorname{argsh} 2t + 2t \sqrt{1 + 4t^2} \right) \end{aligned}$$

2.4.3 Le cercle

Le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ peut être paramétré en polaires par $\rho = R$. On a donc immédiatement

$$\frac{ds}{d\theta} = R$$

d'où, en prenant $\theta = 0$ pour origine des abscisses curvilignes,

$$s = R\theta$$

En particulier, la longueur du cercle, obtenue pour $\theta = 2\pi$, est $L = 2\pi R$.

2.4.4 La cardioïde

La cardioïde est paramétrée en coordonnées polaires par

$$\rho = a(1 - \cos \theta)$$

où $a > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. On a

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 &= a^2((1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta) \\ &= 2a^2(1 - \cos \theta) \\ &= 4a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

De là, en prenant $\theta = 0$ pour origine des abscisses curvilignes,

$$s = 2a \int_0^\theta \sin \frac{t}{2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right)$$

En particulier, la longueur totale de la cardioïde est $L = 8a$.

2.4.5 La spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède est donnée en polaires par $\rho = a\theta$, où $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{\theta^2 + 1}$$

Pour $\theta \geq 0$, on a donc, en prenant 0 pour origine des abscisses curvilignes,

$$s = a \int_0^\theta \sqrt{t^2 + 1} dt$$

Faisons le changement de variable $t = \operatorname{sh} u$. Il vient

$$\begin{aligned}
 s &= a \int_0^{\operatorname{Argsh} \theta} \operatorname{ch}^2 u \, du \\
 &= \frac{a}{2} \int_0^{\operatorname{argsh} \theta} (1 + \operatorname{ch} 2u) \, du \\
 &= \frac{a}{2} \left[u + \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2u \right]_0^{\operatorname{argsh} \theta} \\
 &= \frac{a}{2} \left[u + \operatorname{sh} u \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 u} \right]_0^{\operatorname{argsh} \theta} \\
 &= \frac{a}{2} \left(\operatorname{argsh} \theta + \theta \sqrt{1 + \theta^2} \right)
 \end{aligned}$$

2.4.6 La spirale logarithmique

La spirale logarithmique est donnée en polaires par $\rho = ae^{k\theta}$, où $a > 0$, $k \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{ds}{d\theta} = a\sqrt{1 + k^2}e^{k\theta}$$

Lorsque $k > 0$, on peut prendre élégamment $\theta = -\infty$ comme origine des abscisses curvilignes, et obtenir

$$s = \frac{a}{k} \sqrt{1 + k^2} e^{k\theta}$$

2.4.7 La cycloïde

La cycloïde est paramétrée par

$$f(t) = a(t - \sin t, 1 - \cos t)$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(t) = a(1 - \cos t, \sin t)$$

d'où

$$\left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = 2a^2(1 - \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

On retrouve exactement la même expression que pour la cardioïde. En prenant 0 pour origine des abscisses curvilignes, on obtient ainsi

$$s = 4a \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right)$$

En particulier, une arche de la cycloïde est obtenue en faisant décrire le segment $[0, 2\pi]$ au paramètre. Cette arche a donc pour longueur $L = 8a$.

2.4.8 L'hélice circulaire droite

Soient $a, b > 0$. Considérons l'arc f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f'(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

et donc

$$\|f'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Prenons $t = 0$ pour origine des abscisses curvilignes. On a alors

$$s = t\sqrt{a^2 + b^2}$$

Chapitre 3

Courbure en dimension 2

Dans ce chapitre on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté. Le produit scalaire des deux vecteurs u et v est noté $\langle u, v \rangle$. Leur produit mixte est noté $[u, v]$.

3.1 Courbure

3.1.1 Repère de Frénet

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc $\mathcal{C}^1$ régulier. La régularité de f permet d'utiliser, outre le paramètre générique $t \in I$, un paramétrage par l'abscisse curviligne s . La quantité $f'(t) = \frac{df}{dt}$ est un vecteur tangent à la courbe au point de paramètre t . En divisant par sa norme, on obtient le *vecteur tangent unitaire*

$$\tau = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} = \frac{df}{ds}$$

Remarquons que dans un paramétrage par s , le vecteur tangent est automatiquement unitaire.

Définition 8. Le vecteur normal unitaire est l'unique vecteur ν tel que (τ, ν) soit une base orthonormée directe du plan.

Remarque. τ et ν sont des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Leur ensemble de départ est l'intervalle I de départ de l'arc f . Ces deux fonctions peuvent également être paramétrées par s .

Définition 9. Soit m un point de la courbe. Le repère (m, τ, ν) est le *repère de Frénet* au point m .

Exemple. Calculons le repère de Frénet en un point d'une ellipse. On paramètre l'ellipse par

$$x = a \cos t, y = b \sin t$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a

$$f' = (-a \sin t, a \cos t)$$

D'où

$$\begin{aligned}\tau &= \left(-\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t \right) \\ \nu &= \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t \right)\end{aligned}$$

Évidemment, dans le cas du cercle, $a = b$ et tout devient plus simple.

3.1.2 Courbure

Soit f un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Les fonctions τ et ν sont donc de classe $\mathcal{C}^1$. On a $\langle \tau, \tau \rangle = 1$. Ainsi, en dérivant par rapport à s , on obtient

$$2 \left\langle \tau, \frac{d\tau}{ds} \right\rangle = 0$$

On en déduit que $\frac{d\tau}{ds}$ est colinéaire à ν . Il existe donc un unique réel c tel que $\frac{d\tau}{ds} = c\nu$.

Définition 10. Le réel c est la *courbure* à la courbe au point de paramètre s .

Le vecteur ν étant lui-aussi unitaire, il existe un réel λ tel que $\frac{d\nu}{ds} = \lambda\tau$. Mais on a aussi $\langle \tau, \nu \rangle = 0$. En dérivant, on obtient

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle \frac{d\tau}{ds}, \nu \right\rangle + \left\langle \tau, \frac{d\nu}{ds} \right\rangle \\ &= c \langle \nu, \nu \rangle + \lambda \langle \tau, \tau \rangle \\ &= c + \lambda\end{aligned}$$

Ainsi, $c = -\lambda$. On obtient finalement les *formules de Frénet*.

Proposition 15.

$$\frac{d\tau}{ds} = c\nu \quad \frac{d\nu}{ds} = -c\tau$$

3.1.3 Calculs pratiques

Les formules précédentes, remarquablement simples, posent problème en pratique puisqu'elles demandent la connaissance de τ et ν en fonction de l'abscisse curviligne s qui, elle, est la plupart du temps impossible à calculer. On peut cependant tout exprimer au moyen du paramètre t .

Remarquons que

$$\left[\tau, \frac{d\tau}{ds} \right] = [\tau, c\nu] = c$$

On a

$$\tau = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dt} \frac{dt}{ds}$$

De là,

$$\begin{aligned} \frac{d\tau}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{df}{dt} \right) \frac{dt}{ds} + \frac{df}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \\ &= \frac{d^2f}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{df}{dt} \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left[\tau, \frac{d\tau}{ds} \right] &= \left[\frac{df}{dt} \frac{dt}{ds}, \frac{d^2f}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \right] \\ &= \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \left[\frac{df}{dt}, \frac{d^2f}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, en notant par un « prime » les dérivées par rapport à t ,

$$c = \frac{[f', f'']}{\|f'\|^3}$$

Remarque.

- La courbure n'est pas définie en un point où la dérivée de f s'annule.
- Le signe de la courbure est celui du déterminant $[f', f'']$, c'est à dire que la courbure est positive lorsque la courbe « tourne à gauche » dans le sens des t croissants, et négative sinon.
- La courbure est nulle si et seulement si le point n'est pas birégulier.

Supposons l'arc donné en coordonnées polaires par $f(t) = \rho(t)u(\theta(t))$ où $u(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Posons $v(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta)$. On a

$$\begin{aligned} f' &= \rho' u + \rho \theta' v \\ f'' &= (\rho'' - \rho \theta'^2) u + (2\rho' \theta' + \rho \theta'') v \end{aligned}$$

De là,

$$\|f'\|^2 = \rho'^2 + \rho^2 \theta'^2$$

et

$$\begin{aligned} [f', f''] &= \rho' (2\rho' \theta' + \rho \theta'') - \rho \theta' (\rho'' - \rho \theta'^2) \\ &= \theta' (\rho^2 \theta'^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho'') + \rho \rho' \theta'' \end{aligned}$$

d'où

$$c = \frac{\theta' (\rho^2 \theta'^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho'') + \rho \rho' \theta''}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \theta'^2}^3}$$

En particulier, lorsque $\theta = t$,

$$c = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho \rho''}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}^3}$$

3.2 Quelques exemples

3.2.1 L'ellipse

Soient $a, b > 0$. Considérons l'ellipse paramétrée par

$$f(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-a \sin t, b \cos t) \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \\ f''(t) &= (-a \cos t, -b \sin t) \end{aligned}$$

d'où

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}^3}$$

Dans le cas d'un cercle, $a = b$ et on obtient $c = \frac{1}{a}$.

En quels points la courbure de l'ellipse est-elle minimale ? Maximale ? Supposons par exemple $a > b$. Pour des raisons de symétrie, il suffit de prendre $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Écrivons

$$c = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2}^3}$$

La courbure maximale est obtenue quand le dénominateur est minimal, c'est à dire pour $t = 0$. Elle vaut $\frac{a}{b^2}$. La courbure minimale est obtenue quand le dénominateur est maximal, c'est à dire pour $t = \frac{\pi}{2}$. Elle vaut $\frac{b}{a^2}$.

3.2.2 La parabole

Soit $p > 0$. Considérons la parabole d'équation cartésienne $y^2 = 2px$. On peut paramétrer la parabole par

$$f(t) = (2pt^2, 2pt)$$

où $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= (4pt, 2p) \\ f''(t) &= (4p, 0) \end{aligned}$$

d'où

$$c = \frac{-1}{p\sqrt{4t^2 + 1}^3}$$

La valeur absolue de la courbure est maximale au sommet de la parabole (pour $t = 0$, où elle est égale à $\frac{1}{p}$).

3.2.3 La cardioïde

Soit $a > 0$. La cardioïde est paramétrée en coordonnées polaires par

$$\rho = a(1 - \cos \theta)$$

où $\theta \in [0, 2\pi[$. On a

$$\begin{aligned}\rho' &= a \sin \theta \\ \rho'' &= a \cos \theta\end{aligned}$$

d'où

$$\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = 2a \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' &= a^2((1 - \cos \theta)^2 + 2 \sin^2 \theta - (1 - \cos \theta) \cos \theta) \\ &= a^2(3 - 3 \cos \theta) \\ &= 6a^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

La courbure n'est pas définie pour $\theta = 0$. Le point correspondant n'est pas un point régulier (c'est en fait un rebroussement de première espèce). Pour $\theta \in]0, 2\pi[$, on a

$$c = \frac{3}{4a \sin \frac{\theta}{2}}$$

3.3 Rayon de courbure

3.3.1 Position du support par rapport à un cercle

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^3$. On suppose f paramétré par l'abscisse curviligne s .

Soit $m = f(s)$ un point de la courbe. Soit

$$\omega = m + \alpha\tau + \beta\nu$$

un point du plan exprimé dans le repère de Frénet.

Donnons-nous un réel h assez petit pour que $s + h \in I$, et considérons le point $p = f(s + h)$. Le problème est de déterminer la position du point p par rapport au cercle passant par m , de centre ω . On effectue pour cela un développement limité à l'ordre 3 de $\|\vec{\omega p}\|^2$ au voisinage de $h = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\omega p} &= \overrightarrow{\omega m} + \overrightarrow{m p} \\
&= f(s+h) - f(s) - \alpha\tau - \beta\nu \\
&= hf'(s) + \frac{h^2}{2}f''(s) + \frac{h^3}{6}f'''(s) + o(h^3) - \alpha\tau - \beta\nu \\
&= h\tau + \frac{h^2}{2}c\nu + \frac{h^3}{6}(c'\nu - c^2\tau) + o(h^3) - \alpha\tau - \beta\nu \\
&= \left(-\alpha + h - c^2\frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\tau + \left(-\beta + c\frac{h^2}{2} + c'\frac{h^3}{6} + o(h^3)\right)\nu
\end{aligned}$$

On prend la norme au carré :

$$\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha h + h^2(1 - \beta c) + \frac{h^3}{3}(\alpha c^2 - \beta c') + o(h^3)$$

La position du point p par rapport au cercle est donnée par le signe de $\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 - \alpha^2 - \beta^2$. On distingue plusieurs cas :

- Si $\alpha \neq 0$, alors le point ω n'est pas sur la normale à la courbe au point m . Une autre façon d'exprimer les choses est : la tangente au cercle en m et la tangente à la courbe en m sont deux droites distinctes. On a alors

$$\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 - \|\overrightarrow{\omega m}\|^2 \sim -2\alpha h$$

La courbe traverse le cercle au point m .

- Si $\alpha = 0$, le cercle et la courbe sont tangents au point m . On a alors

$$\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 = \beta^2 + h^2(1 - \beta c) - \frac{h^3}{3}\beta c' + o(h^3)$$

On voit qu'il y a encore deux cas :

- Si $1 - \beta c \neq 0$, alors

$$\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 - \|\overrightarrow{\omega m}\|^2 \sim h^2(1 - \beta c)$$

Au voisinage du point m , la courbe est tout entière à l'intérieur du cercle, ou tout entière à l'extérieur, selon le signe de $1 - \beta c$.

- Si $1 - \beta c = 0$, c'est à dire lorsque $\beta = \frac{1}{c}$, alors

$$\|\overrightarrow{\omega p}\|^2 - \|\overrightarrow{\omega m}\|^2 \sim -\frac{c'}{3c}h^3$$

à condition que $c' \neq 0$. Au point m , la courbe « traverse tangentiellement » le cercle.

Définition 11. Le réel

$$R = \frac{1}{c}$$

est le *rayon de courbure* à la courbe au point de paramètre s . Le point ω défini par $\overrightarrow{m\omega} = R\nu$ est le *centre de courbure* à la courbe. Le cercle de centre ω et de rayon $|R|$ est le *cercle osculateur*.

Remarque. Si jamais $c' = 0$ au point considéré, alors le développement limité à l'ordre 3 ne suffit pas pour déterminer la position de la courbe par rapport au cercle. Le cercle osculateur est dit *surosculateur*. Une telle situation survient par exemple lors d'un minimum ou d'un maximum de la courbure, par exemple aux 4 sommets d'une ellipse. La position du cercle surosculateur par rapport à la courbe doit être étudiée de façon plus fine.

3.3.2 Développée

3.3.3 Quelques exemples

3.3.4 Développantes

3.4 Paramétrage par l'angle polaire

3.4.1 Le théorème de relèvement

Proposition 16. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant $\forall t \in I, \|f(t)\| = 1$. Il existe alors une fonction $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que pour tout $t \in I$, $f(t) = (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))$.

Démonstration. On fait la démonstration pour $k \geq 1$ (le cas $k = 0$ est difficile). Identifions $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$. Remarquons d'abord que si une telle fonction α existe, alors $f = \exp(i\alpha)$, donc $f' = i\alpha' f$, d'où $\alpha' = -i \frac{f'}{f}$.

Soit $a \in I$ un réel fixé. Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\alpha(t) = -i \int_a^t \frac{f'(u)}{f(u)} du$$

de sorte que la dérivée de α vérifie l'égalité de la ligne précédente. Cette fonction α est effectivement de classe $\mathcal{C}^k$, mais un certain nombre de points restent à éclaircir. Posons $g(t) = \exp(i\alpha(t))$. On a

$$g' = i\alpha' g = \frac{f'}{f} g$$

Ainsi, $f'g - fg' = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g = \lambda f$.

Au point a , on a $g(a) = 1 = \lambda f(a)$. On en déduit que $\lambda = \frac{1}{f(a)}$ est un nombre complexe de module 1. Posons $\lambda = e^{i\beta}$, où $\beta \in \mathbb{R}$. Il vient finalement $f(t) = \exp(i(\alpha(t) - \beta))$. Enfin, $\alpha(t) - \beta$ est effectivement réel, car $f(t)$ est un nombre complexe de module 1. $\square$

3.4.2 Un nouveau paramètre

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc de classe $\mathcal{C}^k$ où $k \geq 1$. La fonction $\tau : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de norme 1. Il existe donc une fonction $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telle que $\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Le réel $\alpha(t)$ est une mesure de l'angle orienté entre l'axe Ox et le vecteur tangent unitaire τ . La fonction α est-elle un changement de paramétrage admissible ? Pour le savoir, supposons $k \geq 2$. Travaillons avec un paramétrage par s . On a

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \nu = c(s) \nu$$

Donc,

$$\frac{d\alpha}{ds} = c(s)$$

Proposition 17. *Le paramétrage α est admissible si et seulement si l'arc est birégulier.*

3.4.3 Quelques formules utiles

- Courbure : $c = \frac{d\alpha}{ds}$
- Rayon de courbure : $R = \frac{ds}{d\alpha}$
- Vecteur tangent : $\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \frac{dy}{ds} = \sin \alpha$
- Centre de courbure. Si $z = x + iy$ est l'affixe du point m de la courbe, et si $Z = X + iY$ est l'affixe du centre de courbure Ω au point m , alors $Z = z + i \frac{dz}{d\alpha}$.

Ces formules servent en particulier à résoudre certains types d'équations, appelées équations intrinsèques.

Exercice. Trouver les courbes dont la courbure est constante, les courbes vérifiant $R = s$.

Chapitre 4

La dimension 3

4.1 Courbure et torsion en dimension 3

Dans cette section, on se place dans l'espace $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté. On note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire des deux vecteurs u et v et $u \wedge v$ leur produit vectoriel. On note enfin $[u, v, w]$ le produit mixte des trois vecteurs u, v, w .

4.1.1 Courbure

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ un arc de classe $\mathcal{C}^3$ birégulier. On suppose f paramétré par une abscisse curviligne s . Posons $\tau = f'$. La fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est donc de classe $\mathcal{C}^2$. Le vecteur τ est un vecteur unitaire. On a donc

$$\langle \tau, \tau \rangle = 1$$

Une dérivation de ce produit scalaire donne

$$2 \langle \tau, \tau' \rangle = 0$$

Ainsi, le vecteur $\tau' = f''$ est orthogonal à τ . L'arc f étant birégulier, $\tau' \neq 0$. Posons

$$\tau' = c\nu$$

où $c = \|\tau'\|$. La fonction $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ν est unitaire. La fonction $c : I \rightarrow \mathbb{R}$ est elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 12. $c(s)$ est la *courbure* de l'arc f au point de paramètre s .

4.1.2 Torsion

Appelons $\beta = \tau \wedge \nu$, de sorte que (τ, ν, β) est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$. La fonction $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition 13. Soit $\Omega = f(s)$. Le repère $\mathcal{R} = (\Omega, \tau, \nu, \beta)$ est le *repère de Darboux* au point de paramètre s .

ν étant unitaire, il vient, comme, pour τ ,

$$\langle \nu', \nu \rangle = 0$$

Il existe donc $p, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nu' = p\tau + q\beta$$

De $\langle \tau, \nu \rangle = 0$, on déduit

$$\langle \tau', \nu \rangle + \langle \tau, \nu' \rangle = 0$$

ou encore

$$c \langle \nu, \nu \rangle + p \langle \tau, \tau \rangle + \gamma \langle \tau, \beta \rangle = 0$$

c'est à dire

$$p = -c$$

Ainsi,

$$\nu' = -c\tau + \gamma\beta$$

Remarquons que $\gamma = \langle \nu', \beta \rangle$. La fonction $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est donc continue sur I .

Définition 14. $\gamma(s)$ est la *torsion* de l'arc f au point de paramètre s .

Passons à la dérivée de β . Comme pour le calcul de ν' , il existe $p, q \in \mathbb{R}$ tels que

$$\beta' = p\tau + q\nu$$

De $\langle \beta, \tau \rangle = 0$ on déduit, en dérivant,

$$\langle p\tau + q\nu, \tau \rangle + \langle \beta, c\nu \rangle = 0$$

ou encore $p = 0$. De $\langle \beta, \nu \rangle = 0$ on déduit, en dérivant,

$$\langle p\tau + q\nu, \nu \rangle + \langle \beta, -c\tau + \gamma\beta \rangle = 0$$

ou encore

$$q = -\gamma$$

Ainsi,

$$\beta' = -\gamma\nu$$

On obtient ainsi les *formules de Darboux*

Proposition 18.

$$\begin{cases} d\tau/ds &= c\nu \\ d\nu/ds &= -c\tau + \gamma\beta \\ d\beta/ds &= -\gamma\nu \end{cases}$$

Ces formules peuvent également être écrites sous la forme matricielle

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ \nu' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \nu \\ \beta \end{pmatrix}$$

4.1.3 Calculs pratiques

Supposons l'arc f paramétré par un paramètre quelconque t . Notons $\hat{f}$ le paramétrage de f par l'abscisse curviligne s . Dans les calculs ci dessous, la signe « prime » désigne une dérivée par rapport à t . Remarquons que

$$\tau \wedge \frac{d\tau}{ds} = c\tau \wedge \nu = c\beta$$

et donc

$$c = \left\| \tau \wedge \frac{d\tau}{ds} \right\|$$

Notons

$$\lambda = \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|}$$

On a

$$\tau = \frac{d\hat{f}}{ds} = \lambda f'$$

De là, en dérivant par rapport à s ,

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\lambda}{ds} f' + \lambda^2 f''$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \tau \wedge \frac{d\tau}{ds} &= \tau \wedge \left(\frac{d\lambda}{ds} f' + \lambda^2 f'' \right) \\ &= \lambda^2 \tau \wedge f'' \\ &= \lambda^3 f' \wedge f'' \end{aligned}$$

On en déduit

$$c = \frac{\|f' \wedge f''\|}{\|f'\|^3}$$

Passons au calcul de la torsion. Remarquons que

$$\left[\tau, \nu, \frac{d\nu}{ds} \right] = [\tau, \nu, -c\tau + \gamma\beta] = \gamma$$

On a, en reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned} \tau &= \lambda f' \\ c\nu &= \frac{d\lambda}{ds} f' + \lambda^2 f'' \end{aligned}$$

En dérivant la seconde égalité, il vient

$$\frac{dc}{ds} \nu + c \frac{d\nu}{ds} = \frac{d^2\lambda}{ds^2} f' + 2\lambda^2 f'' + \lambda^3 f'''$$

Faisons le produit mixte des trois vecteurs ci-dessus.

$$\left[\tau, c\nu, \frac{dc}{ds}\nu + c\frac{d\nu}{ds} \right] = c^2 \left[\tau, \nu, \frac{d\nu}{ds} \right] = c^2 \gamma = \lambda^6 \|f' \wedge f''\|^2 \gamma$$

Ce produit mixte est aussi égal à

$$\left[\lambda f', \frac{d\lambda}{ds} f' + \lambda^2 f'', \frac{d^2\lambda}{ds^2} f' + 2\lambda^2 f'' + \lambda^3 f''' \right]$$

Le produit mixte est trilineaire alterné. En développant le produit ci-dessus, tous les termes s'annulent, sauf

$$[\lambda f', \lambda^2 f'', \lambda^3 f'''] = \lambda^6 [f', f'', f''']$$

Finalement,

$$\gamma = \frac{[f', f'', f''']}{\|f' \wedge f''\|^2}$$

4.1.4 Un exemple

Considérons l'hélice circulaire droite définie par

$$f(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

où $a, b > 0$ et $t \in \mathbb{R}$. On a $f' = (-a \sin t, a \cos t, b)$. De là,

$$\|f'\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Continuons. On a $f'' = -a(\cos t, \sin t, 0)$. De là,

$$\begin{aligned} f' \wedge f'' &= -a(-a \sin t, a \cos t, b) \wedge (\cos t, \sin t, 0) \\ &= -a(-b \sin t, b \cos t, -a) \end{aligned}$$

et donc

$$\|f' \wedge f''\| = a\sqrt{a^2 + b^2}$$

d'où

$$c = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Poursuivons. On a $f''' = a(\sin t, -\cos t, 0)$. De là,

$$[f', f'', f'''] = \langle f' \wedge f'', f''' \rangle = a^2 b$$

et donc

$$\gamma = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

4.2 Courbures en dimension quelconque

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un arc de classe $\mathcal{C}^d$. On suppose f paramétré par son abscisse curviligne s . Posons $\tau = f'$. La fonction $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est donc de classe $\mathcal{C}^{d-1}$. Le vecteur τ est un vecteur unitaire. On a donc

$$\langle \tau, \tau \rangle = 1$$

Une dérivation de ce produit scalaire donne

$$\langle \tau, \tau' \rangle = 0$$

Ainsi, le vecteur $\tau' = f''$ est orthogonal à τ . L'arc f étant birégulier, $\tau' \neq 0$. Posons

$$\nu_1 = \frac{\tau'}{\|\tau'\|}$$

La fonction $\nu_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$ et ν_1 est unitaire. On a

$$\tau' = c_1 \nu_1$$

où $c_1 = \|\tau'\| > 0$. La fonction $c_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^{d-2}$.

Dans ce qui suit, nous noterons $\nu_0 = \tau$.

De $\langle \nu_1, \nu_1 \rangle = 1$ on déduit que ν_1' est orthogonal à ν_1 . On peut donc écrire

$$\nu_1' = k \nu_0 + c_2 \nu_2$$

où $k \in \mathbb{R}$, $c_2 \geq 0$ et ν_2 est unitaire et orthogonal à ν_0 et ν_1 . De plus, de $\langle \nu_0, \nu_1 \rangle = 0$, on déduit

$$0 = \langle \nu_0', \nu_1 \rangle + \langle \nu_0, \nu_1' \rangle = c_1 + k$$

Ainsi,

$$\nu_1' = -c_1 \nu_0 + c_2 \nu_2$$

Dérivons maintenant ν_2 . Comme précédemment, ν_2' est orthogonal à ν_2 . On a donc

$$\nu_2' = k_0 \nu_0 + k_1 \nu_1 + c_3 \nu_3$$

où $k_0, k_1 \in \mathbb{R}$, $c_3 \geq 0$ et ν_3 est unitaire, orthogonal à ν_0, ν_1 et ν_2 . De $\langle \nu_2, \nu_0 \rangle = 0$ on déduit par dérivation

$$0 = \langle \nu_2', \nu_0 \rangle + \langle \nu_2, \nu_0' \rangle = k_0$$

De $\langle \nu_2, \nu_1 \rangle = 0$ on déduit par dérivation

$$0 = \langle \nu_2', \nu_1 \rangle + \langle \nu_2, \nu_1' \rangle = k_1 + c_2$$

Ainsi,

$$\nu_2' = -c_2 \nu_1 + c_3 \nu_3$$

Soit $j \in \llbracket 1, d-2 \rrbracket$. Supposons trouvés j vecteurs $\nu_1, \dots, \nu_j$ tels que la famille $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_j)$ soit orthonormée, et, de plus, pour tout $i \in \llbracket 1, j-1 \rrbracket$,

$$\nu_i' = -c_i \nu_{i-1} + c_{i+1} \nu_{i+1}$$

En dérivant ν_j qui est unitaire, on obtient un vecteur orthogonal à ν_j . Il existe donc $c_{j+1} \geq 0$, j réels $k_0, \dots, k_j$ et un vecteur ν_{j+1} unitaire et orthogonal à $\nu_0, \dots, \nu_j$ tels que

$$\nu'_j = \sum_{i=0}^{j-1} k_i \nu_i + c_{j+1} \nu_{j+1}$$

Soit $i \leq j-2$. On a

$$0 = \langle \nu'_j, \nu_i \rangle + \langle \nu_j, \nu'_i \rangle = k_i$$

On a également

$$0 = \langle \nu'_j, \nu_{j-1} \rangle + \langle \nu_j, \nu'_{j-1} \rangle = k_{j-1} + c_j$$

Ainsi,

$$\nu'_j = -c_j \nu_{j-1} + c_{j+1} \nu_{j+1}$$

Nous venons de montrer par récurrence forte l'existence de d réels positifs $c_1, \dots, c_d$ et d'une base orthonormée $(\nu_0, \dots, \nu_{d-1})$ de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$\nu'_0 = c_1 \nu_1$$

$$\forall j \in \llbracket 1, d-2 \rrbracket, \nu'_j = -c_j \nu_{j-1} + c_{j+1} \nu_{j+1}$$

Il nous reste à déterminer ν'_{d-1} . Ce vecteur est orthogonal à ν_{d-1} , il existe donc combinaison linéaire de $\nu_0, \dots, \nu_{d-2}$. Comme ci-dessus, on vérifie que c'est en fait un multiple de ν_{d-2} et que le coefficient multiplicateur est $-c_{d-2}$. Ainsi,

$$\nu'_{d-1} = -c_{d-1} \nu_{d-2}$$

Ces formules peuvent être exprimées matriciellement. Soit la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -c_1 & 0 & c_2 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -c_{d-2} & 0 & c_{d-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -c_{d-1} & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \nu'_0 \\ \nu'_1 \\ \vdots \\ \nu'_{d-1} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \nu_0 \\ \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_{d-1} \end{pmatrix}$$

Remarque. On peut légèrement améliorer le résultat ci-dessus en autorisant c_{d-1} à être négatif et en changeant éventuellement ν_{d-1} en son opposé de façon à ce que la base $(\nu_0, \dots, \nu_{d-1})$ soit *orthonormée directe*.