

$$\perp \circ \perp \neq id$$

Marc Lorenzi

2 juin 2022

On se place dans l'espace préhilbertien réel $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

On note

$$H = \{f \in E, f(0) = 0\}$$

et $\mu : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout réel x par $\mu(x) = 1$. On note $D = \langle \mu \rangle$.

Proposition 1. *H est un hyperplan de E et $H \oplus D = E$.*

Démonstration. H est le noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0)$, c'est donc un hyperplan. De plus, $\mu \notin H$ donc H et D sont supplémentaires. Plus concrètement, pour toute fonction $f \in E$, on a $f = h + f(0)\mu$ où $h = f - f(0)\mu$ est clairement un élément de H . $\square$

Définition 1. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de E . Soit $f \in E$. On dit que f_n tend vers f lorsque n tend vers l'infini lorsque $d(f_n, f)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, considérons la fonction $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_n(x) = nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $\varphi_n(x) = 1$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$. On vérifie aisément que $\varphi_n \in H$.

Proposition 2. *$\varphi_n \rightarrow \mu$ lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}
d(\varphi_n, \mu)^2 &= \langle \varphi_n - \mu, \varphi_n - \mu \rangle = \int_0^1 (\varphi_n(t) - \mu(t))^2 dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{n}} (nt - 1)^2 dt = \left[\frac{(nt - 1)^3}{3n} \right]_0^{\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{3n}
\end{aligned}$$

Ainsi, $d(\varphi_n, \mu)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. $\square$

Nous admettrons dans ce qui suit l'unicité de la limite d'une suite d'éléments de E (si elle existe) et les théorèmes sur les opérations sur les limites pour la somme et le produit par un réel. Ces propriétés se montrent comme pour les fonctions à valeurs réelles.

Proposition 3. *H est dense dans E . Plus précisément, pour toute fonction $f \in E$ il existe une suite d'éléments de H qui tend vers f .*

Démonstration. Posons, pour tout entier naturel non nul n ,

$$f_n = (f - f(0)\mu) + f(0)\varphi_n$$

On a clairement $f_n \in H$. De plus, lorsque n tend vers l'infini, f_n tend vers

$$f - f(0)\mu + f(0)\mu = f$$

$\square$

Proposition 4. $H^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Soit $f \in H^\perp$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H qui tend vers f . On a pour tout entier n , $\langle f, f_n \rangle = 0$. De là,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \langle f, f \rangle \\
&= |\langle f, f_n \rangle - \langle f, f \rangle| \\
&= |\langle f, f_n - f \rangle| \\
&\leq \|f\| \|f_n - f\| \\
&= \|f\| d(f_n, f)
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On en déduit que $\|f\| = 0$, donc que $f = 0$. L'inclusion réciproque est triviale. $\square$

Corollaire 5. $H^\perp$ n'est pas un supplémentaire de H .

Corollaire 6. $H^{\perp\perp} \neq H$.

Démonstration. En effet, $H^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = E$. $\square$