

Unicité du centre et du rayon d'une sphère

Marc Lorenzi

17 novembre 2024

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit E d'une norme $\| \cdot \|$.

Définition 1. Pour tout vecteur $a \in E$ et tout réel $r > 0$, la *sphère* de centre a et de rayon r est

$$S(a, r) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}$$

Le vecteur a est le *centre* de la sphère et le réel r est son *rayon*.

Mais au fait, pourquoi *le* centre et *le* rayon ? Une sphère ne pourrait-elle pas avoir plusieurs centres, ou plusieurs rayons différents ? Eh bien non. Je ne sais pas pourquoi, mais ce point n'est quasiment jamais évoqué (et encore moins prouvé) dans les textes. Alors, montrons-le.

Proposition 1. *Une sphère possède un unique centre et un unique rayon.*

Démonstration. Soient $a, a' \in E$ et $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $S(a, r) = S(a', r')$. Pour fixer les idées, prenons $r \leq r'$.

Supposons, par l'absurde, que $a \neq a'$. Soit

$$u = \frac{a' - a}{\|a' - a\|}$$

On a donc $a' = a + \lambda u$ où $\lambda = \|a' - a\| \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $x = a + ru$. On a

$$\|x - a\| = \|ru\| = r\|u\| = r$$

donc $x \in S(a, r)$, et donc $x \in S(a', r')$. De là,

$$r'\|x - a'\| = \|(a + ru) - (a + \lambda u)\| = |r - \lambda|$$

On en déduit que $\lambda = r + r'$ ou $\lambda = r - r'$. Or, $r - r' \leq 0$ et $\lambda > 0$, donc $\lambda = r + r'$.

Considérons maintenant $y = a - ru$. Comme pour x , on a $y \in S(a, r)$ donc $y \in S(a', r')$, donc

$$r' = \|y - a'\| = \|(a - ru) - (a - \lambda u)\| = |r + \lambda|$$

On en déduit que $\lambda = r' - r$ ou $\lambda = -r - r'$. Or, $-r - r' \leq 0$ et $\lambda > 0$, donc $\lambda = r' - r$.

On a finalement $\lambda = r + r' = r' - r$, donc $r = 0$, contradiction. Ainsi, $a = a'$.

Il reste le plus facile. Puisque $a = a'$, nous avons $S(a, r) = S(a, r')$. Prenons $u \in E$ unitaire. On a $a + ru \in S(a, r)$ donc $a + ru \in S(a, r')$, d'où

$$r' = \|(a + ru) - a\| = r$$

□