

# Cubes et boules en grandes dimensions

Marc Lorenzi

13 juin 2025

## 1 Introduction

L'aire d'un carré de côté  $2r$  est égale à  $4r^2$  et l'aire d'un disque de rayon  $R$  est  $\pi R^2$ . Le périmètre de ce même carré est  $8r$  et le périmètre d'un cercle de rayon  $R$  est  $2\pi R$ . En passant à la dimension 3, nous obtenons des résultats tout aussi connus :

- Le volume d'un cube de côté  $2r$  est  $8r^3$  et l'aire du bord du cube est  $24r^2$ .
- Le volume d'une boule de rayon  $R$  est  $\frac{4}{3}\pi R^3$  et l'aire d'une sphère de rayon  $R$  est  $4\pi R^2$ .

Que deviennent ces volumes et ces aires en dimensions supérieures ? Nous allons dans cet article nous intéresser au cas facile des cubes en dimension  $n$ . Nous passerons ensuite aux boules. Nous verrons que lorsque  $n$  tend vers l'infini, les résultats que nous obtiendrons ne seront pas vraiment conformes à l'intuition que nous pourrions avoir de la « forme » d'un cube ou d'une boule.

Dans ce qui suit, l'espace  $\mathbb{R}^n$  est muni de la distance euclidienne usuelle en posant, pour deux points  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$$

Pour toute partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  bornée suffisamment régulière, on peut définir le volume de  $A$ , que nous noterons  $\text{Vol}_n A$ . Nous ne soulèverons pas dans cet article de difficultés théoriques sur le concept de volume. Nous parlerons également de la surface de  $A$ , qui est le volume du bord de  $A$ , ce bord étant vu comme un objet de dimension  $n - 1$ . Nous noterons  $\text{Surf}_n A$  cette surface.

**Définition 1.** Pour tout  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , la *surface* de  $A$  est le volume de son bord.

L'appellation « surface » n'est pas standard, mais elle nous évitera de dire constamment « volume du bord de ».

## 2 Le cube en dimension $n$

**Définition 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$ , le *cube* de  $\mathbb{R}^n$  de rayon  $r$  (et de centre  $O$ ) est

$$C(n, r) = [-r, r]^n$$

Le cas  $n = 0$  est un peu à part :  $C(0, r) = \{0\}$ . Pour  $n = 1$ ,  $C(1, r)$  est le segment  $[-r, r]$ . Pour  $n = 2$ , il s'agit d'un carré. Pour  $n = 3$ , c'est un cube classique.

Dans toute la suite,  $r$  désigne un réel strictement positif.

**Remarque.** Si  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , le cube de centre  $a$  et de rayon  $r$  est

$$\prod_{i=1}^n [a_i - r, a_i + r]$$

Ce cube est l'image de  $C(n, r)$  par la translation de vecteur  $a$ .

### 2.1 Le volume de $C(n, r)$

Par définition même de la notion de volume, on a la formule suivante.

**Proposition 1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Vol}_n C(n, r) = (2r)^n$ .

Notons que le « volume » de  $C(1, r)$  est la longueur du segment  $[-r, r]$ . En dimension 2,  $\text{Vol}_2 C(2, r)$  est la surface du carré de rayon  $r$ . Le lecteur pourrait émettre des doutes sur le volume de  $C(0, r) = \mathbb{R}^0$ , le « cube en dimension zéro ». Prenons donc  $\text{Vol}_0 C(0, r) = 1$  comme une convention. Remarquons que

- Si  $r < \frac{1}{2}$ ,  $\text{Vol}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
- Si  $r > \frac{1}{2}$ ,  $\text{Vol}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .
- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Vol}_n C(n, \frac{1}{2}) = 1$ .

### 2.2 La surface de $C(n, r)$

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Le point  $x$  est *adhérent* à  $A$  lorsque pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $a \in A$  tel que  $d(x, a) \leq \varepsilon$ . On note  $\overline{A}$  l'ensemble des points adhérents à  $A$ . L'ensemble  $\overline{A}$  est l'*adhérence* de  $A$ .

**Définition 3.** Soit  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ . Le *bord* de  $A$  est l'ensemble des points de  $\mathbb{R}^n$  qui sont adhérents à la fois à  $A$  et au complémentaire de  $A$  :

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus A}$$

Pour des ensembles  $A$  suffisamment réguliers, cette notion correspond à la notion intuitive que l'on peut avoir du bord d'un objet. Remarquons aussi le cas très particulier

$n = 0$ . Dans ce cas  $A = \emptyset$  ou  $A = \{0\}$ . Si  $A = \emptyset$ , alors  $\overline{A} = \emptyset$ . Si  $A = \{0\}$ , alors  $\mathbb{R}^0 \setminus A = \emptyset$  et donc  $\overline{\mathbb{R}^0 \setminus A} = \emptyset$ . Dans tous les cas  $\partial A = \emptyset$ .

Le bord d'un segment est un ensemble de deux points, ses extrémités. Le bord d'un carré est la réunion de 4 segments. Le bord d'un cube en dimension 3 est la réunion de 6 carrés. Plus généralement, pour tout  $n \geq 1$ , le bord de  $C(n, r)$  est la réunion de  $2n$  cubes inclus dans des hyperplans affines de  $\mathbb{R}^n$ . Posons, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et tout  $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ ,

$$C_{i,\varepsilon} = \{(x_1, \dots, x_n) \in C(n, r), x_i = \varepsilon r\}$$

Le bord de  $C(n, r)$  est alors

$$\partial C(n, r) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{\varepsilon=\pm 1} C_{i,\varepsilon}$$

**Proposition 2.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Surf}_n C(n, r) = 2n(2r)^{n-1}$ .

**Démonstration.** Immédiate. Le cas  $n = 0$  est un peu osé, mais le bord de  $C(0, r)$  est vide, donc la formule fonctionne :  $\text{Surf}_0 C(0, r)$  est bien égal à 0.  $\square$

Notons que

- Si  $r \geq \frac{1}{2}$ ,  $\text{Surf}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ .
- Si  $r < \frac{1}{2}$ ,  $\text{Surf}_n C(n, r) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Remarquons le cas  $r = \frac{1}{2}$  : le volume du cube est égal à 1 alors que sa surface tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## 2.3 Concentration du volume au bord du cube

Voici notre premier résultat contre-intuitif : en grandes dimensions, la quasi-totalité du volume du cube est concentrée au voisinage de son bord.

Soit  $\varepsilon \in ]0, r[$ . Considérons

$$K(n, r, \varepsilon) = C(n, r) \setminus C(n, r - \varepsilon)$$

L'ensemble  $K(n, r, \varepsilon)$  est la « coquille d'épaisseur  $\varepsilon$  » au bord du cube  $C(n, r)$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) &= (2r)^n - (2r - 2\varepsilon)^n \\ &= (2r)^n \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n\right) \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n\right) \text{Vol}_n C(n, r) \end{aligned}$$

Le quotient  $\text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) / \text{Vol}_n C(n, r)$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini : tout le volume du cube est donc concentré au voisinage de son bord. On peut même aller un peu plus loin en faisant dépendre  $\varepsilon$  de  $n$ . Posons  $\varepsilon = \lambda r / n$  où  $\lambda > 0$ . On a alors

$$1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{r}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e^{-\lambda}$$

Quelle est la signification de ceci ? Cherchons par exemple où se trouve concentrée asymptotiquement la moitié du volume du cube lorsque  $n$  tend vers l'infini. Il suffit pour cela de choisir  $\lambda$  tel que  $1 - e^{-\lambda} = \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $\lambda = \ln 2$ . La moitié du volume du cube  $C(n, r)$  est concentrée dans la très fine coquille d'épaisseur  $r \ln 2 / n$ .

## 2.4 La surface s'obtient comme une limite de volumes

Posons, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{r} \right)^n \right)$$

Un développement limité en  $\varepsilon$  donne

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - 1 + n \frac{\varepsilon}{r} + o(\varepsilon) \right) = \frac{n}{r} + o(1)$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) \longrightarrow \frac{n}{r} \text{Vol}_n C(n, r)$$

Remarquons que

$$\frac{n}{r} \text{Vol}_n C(n, r) = \frac{n}{r} (2r)^n = 2n(2r)^{n-1} = \text{Surf}_n C(n, r)$$

On a donc la propriété ci-dessous.

**Proposition 3.**

$$\frac{1}{\varepsilon} \text{Vol}_n K(n, r, \varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Surf}_n C(n, r)$$

La quantité de gauche est le volume de la coquille  $K(n, r, \varepsilon)$ , divisé par l'épaisseur de cette coquille.

## 2.5 Une résultat probabiliste

**Définition 4.** Soit  $h > 0$ . Soit  $H$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$ . La *tranche* de  $\mathbb{R}^n$  parallèle à  $H$  et d'épaisseur  $2h$  est l'ensemble

$$T_n(H, h) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, H) \leq h\}$$

Donnons-nous une suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  et suivant une loi uniforme sur  $[-r, r]$ . Pour tout ensemble  $A \subseteq C(n, r)$ , le volume de  $A$  est donné par une probabilité :

$$\text{Vol}_n A = \mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A) \text{Vol}_n C(n, r)$$

La *diagonale principale* du cube  $C(n, r)$  est le segment d'extrémités  $(-r, \dots, -r)$  et  $(r, \dots, r)$ . La distance de  $O$  à l'une des extrémités de cette diagonale est

$$\ell_n = r\sqrt{n}$$

Notons

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$$

Le vecteur  $e_n$  est un vecteur unitaire de la diagonale de  $C(n, r)$ .

Pour tout  $n \geq 1$ , soit

$$Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Par la loi faible des grands nombres, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|Z_n| \leq r\varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Or, cette probabilité est aussi

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_n) \in A_n(\varepsilon))$$

où  $A_n(\varepsilon) \subseteq C(n, r)$  défini par

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in C(n, r) : |x_1 + \dots + x_n| \leq nr\varepsilon\}$$

Soit  $H_n$  l'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  orthogonal à  $e_n$  :

$$(H_n) \quad \sum_{k=1}^n x_k = 0$$

En notant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire canonique sur  $\mathbb{R}^n$ , la distance d'un vecteur  $x \in \mathbb{R}^n$  à l'hyperplan  $H_n$  est

$$d(x, H_n) = |\langle x, e_n \rangle| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

Ainsi,

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in C(n, r) : d(x, H_n) \leq \varepsilon\ell_n\} = C(n, r) \cap T_n(H, \varepsilon\ell_n)$$

L'ensemble  $A_n(\varepsilon)$  est l'intersection de  $C(n, r)$  et de la tranche de  $\mathbb{R}^n$  parallèle à  $H_n$ , d'épaisseur  $2\varepsilon\ell_n$ . Nous avons ainsi démontré le résultat suivant.

**Proposition 4.**

$$\frac{\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H_n, \varepsilon\ell_n))}{\text{Vol}_n C(n, r)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Dit autrement, la quasi-totalité du volume de  $C(n, r)$  est concentrée dans la tranche  $T_n(H_n, \varepsilon\ell_n)$ . Remarquons que  $H_n$  n'est pas n'importe quel hyperplan ! Si nous prenons, par exemple, l'hyperplan horizontal  $H'_n$  d'équation  $x_n = 0$ , on a pour tout  $\varepsilon \in ]0, r]$ ,

$$C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon) = [-r, r]^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$$

et donc

$$\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon)) = 2\varepsilon(2r)^{n-1}$$

De là,

$$\frac{\text{Vol}_n(C(n, r) \cap T_n(H'_n, \varepsilon))}{\text{Vol}_n C(n, r)} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Cette quantité ne tend pas vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

En revanche, dans la section suivante, nous verrons que pour les boules, la quasi-totalité du volume de la boule est concentrée dans *n'importe quelle tranche*.

### 3 La boule en dimension $n$

Dans toute la suite  $R$  désigne un réel strictement positif.

**Définition 5.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la *boule fermée de centre  $O$  et de rayon  $R$*  est

$$B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(O, x) \leq R\}$$

Remarquons le cas particulier des dimensions 0 et 1 :  $B(0, R) = \{0\}$  et  $B(1, R) = [-R, R]$ .

#### 3.1 Le volume de $B(n, R)$

On a  $\text{Vol}_0 B(0, R) = 1$  et  $\text{Vol}_1 B(1, R) = 2R$ . Plus généralement, on obtient le volume de la boule au moyen d'une intégrale multiple. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \int \dots \int_{B(n, R)} dx_1 \dots dx_n$$

**Proposition 5.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Vol}_n B(n, R) = \text{Vol}_n B(n, 1) \times R^n$ .

**Démonstration.** Le cas  $n = 0$  est évident. Prenons donc  $n \geq 1$ . On effectue le changement de variable  $(x_1, \dots, x_n) = R(t_1, \dots, t_n)$ , qui est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $R$ . On a alors

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \int_{B(n, 1)} R^n dt_1 \dots dt_n = R^n \text{Vol}_n B(n, 1)$$

□

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$$

$W_n$  est la  $n^{\text{e}}$  intégrale de Wallis.

**Proposition 6.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Vol}_n B(n, 1) = 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)$

**Démonstration.** C'est immédiat si  $n = 1$ . En effet,  $W_1 = 1$ ,  $\text{Vol}_1 B(1, 1) = 2$  et  $\text{Vol}_0 B(0, 1) = 1$ . Prenons donc  $n \geq 2$ . Remarquons que  $(x_1, \dots, x_n) \in B(n, R)$  si et seulement si

$$-R \leq x_n \leq R \text{ et } x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq R^2 - x_n^2$$

Ceci peut encore s'écrire

$$-R \leq x_n \leq R \text{ et } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})$$

Ainsi,

$$B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \in [-R, R] \text{ et } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})\}$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\text{Vol}_n B(n, R) &= \int_{-R}^R \left[ \int_{B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2})} dx_1 \dots dx_{n-1} \right] dx_n \\ &= \int_{-R}^R \text{Vol}_{n-1} B(n-1, \sqrt{R^2 - x_n^2}) dx_n\end{aligned}$$

Par la proposition 5, on a donc

$$\text{Vol}_n B(n, R) = \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x_n^2}^{n-1} dx_n$$

Dans l'intégrale ci-dessus, posons  $x_n = R \sin t$ . Il vient

$$\begin{aligned}\text{Vol}_n B(n, R) &= \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^n \cos^n t dt \\ &= 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt\end{aligned}$$

ou encore

$$R^n \text{Vol}_n B(n, 1) = 2R^n W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)$$

d'où le résultat en divisant par  $R^n$ .  $\square$

**Proposition 7.** Pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = 2^n \prod_{k=1}^n W_k$$

**Démonstration.** Montrons le résultat par récurrence sur  $n$ . Tout d'abord,  $\text{Vol}_1 B(1, 1) = 2$  et  $W_1 = 1$ , l'égalité est donc vérifiée si  $n = 1$ . Soit  $n \geq 2$ . Supposons l'égalité vérifiée pour  $n-1$ . On a alors

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) = 2W_n \times 2^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} W_k = 2^n \prod_{k=1}^n W_k$$

$\square$

Nous allons admettre quelques propriétés bien connues des intégrales de Wallis. Une intégration par parties permet de montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$$

Grâce à cette égalité on démontre par récurrence sur  $p$  que pour tout entier naturel  $p$ ,

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \frac{\pi}{2}$$

et

$$W_{2p+1} = \frac{2^{2p} p!^2}{(2p+1)!}$$

On en déduit alors que

$$W_{2p}W_{2p+1} = \frac{\pi}{2(2p+1)}$$

La suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante, tend vers 0, et on possède un équivalent de son terme général lorsque  $n$  tend vers l'infini :

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

**Proposition 8.** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, R) &= \frac{2^{2p+1}\pi^p p!}{(2p+1)!} R^{2p+1} \\ \text{Vol}_{2p}B(2p, R) &= \frac{\pi^p}{p!} R^{2p} \end{aligned}$$

**Démonstration.** Par la proposition 5, il suffit de faire la preuve pour  $R = 1$ . Soit  $p \in \mathbb{N}$ . En tenant compte de ce que  $W_1 = 1$ , on a

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, 1) &= 2^{2p+1} \prod_{k=2}^{2p+1} W_k \\ &= 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p W_{2k} W_{2k+1} \\ &= 2^{2p+1} \prod_{k=1}^p \frac{\pi}{2(2k+1)} \\ &= 2^{2p+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2p+1)} \\ &= 2^{2p+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^p \frac{2^p p!}{(2p+1)!} \\ &= \frac{2^{2p+1} \pi^p p!}{(2p+1)!} \end{aligned}$$

Passons aux entiers pairs. L'égalité est vérifiée pour  $p = 0$ . Soit  $p \geq 1$ . Par la proposition 6,

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{2p}B(2p, 1) &= \frac{\text{Vol}_{2p+1}B(2p+1, 1)}{2W_{2p+1}} \\ &= \frac{2^{2p+1}\pi^p p! (2p+1)!}{(2p+1)! 2^{2p+1} p!^2} \\ &= \frac{\pi^p}{p!} \end{aligned}$$

□

Voici les premières valeurs de  $\text{Vol}_n B(n, R)$ .



| $n$                    | 0                       | 1                      | 2                         | 3                       | 4                         |
|------------------------|-------------------------|------------------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| $\text{Vol}_n B(n, R)$ | 1                       | $2R$                   | $\pi R^2$                 | $\frac{4}{3}\pi R^3$    | $\frac{1}{2}\pi^2 R^4$    |
| $n$                    | 5                       | 6                      | 7                         | 8                       | 9                         |
| $\text{Vol}_n B(n, R)$ | $\frac{8}{15}\pi^2 R^5$ | $\frac{1}{6}\pi^3 R^6$ | $\frac{16}{105}\pi^3 R^7$ | $\frac{1}{24}\pi^4 R^8$ | $\frac{32}{945}\pi^4 R^9$ |

FIGURE 1 – Quelques valeurs de  $\text{Vol}_n B(n, R)$

**Proposition 9.**

$$\text{Vol}_n B(n, R) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^n$$

**Démonstration.** Il suffit de faire la preuve pour  $R = 1$ . Prenons tout d'abord  $n$  pair. Par la formule de Stirling,

$$\text{Vol}_n B(n, 1) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} \sim \frac{\pi^{n/2} e^{n/2}}{(n/2)^{n/2} \sqrt{\pi n}}$$

ce qui est, en regroupant les facteurs, le résultat attendu.

Prenons maintenant  $n$  impair. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(n, 1) &= 2W_n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \\ &\sim 2\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \left( \frac{2\pi e}{n-1} \right)^{\frac{n-1}{2}} \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n e}} \left( \frac{2\pi e}{n-1} \right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$(n-1)^{\frac{n}{2}} = n^{\frac{n}{2}} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} n^{\frac{n}{2}}$$

d'où le résultat.  $\square$

**Exemple.** En dimension 999, le volume de la boule unité est de l'ordre de  $10^{-884}$ . En dimension 9999, le volume de la boule unité est de l'ordre de  $10^{-13838}$ .

**Corollaire 10.** Lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $\text{Vol}_n B(n, R)$  tend vers 0.

**Démonstration.** C'est immédiat à partir de l'équivalent de  $\text{Vol}_n B(n, R)$ .  $\square$

Le volume de  $B(n, R)$  tend donc vers 0, ceci quel que soit  $R$ .

**Exemple.** En dimension  $n = 100$ , le volume d'une boule ayant un rayon de 1 mètre est égal à  $2.37 \times 10^{-40} \text{m}^{100}$ .

Voici un graphique montrant  $\text{Vol}_n B(n, 1)$  en fonction de  $n$ . On a pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, 1)}{\text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1)} = 2W_n$$

Or, la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante,  $2W_5 = \frac{16}{15} > 1$  et  $2W_6 = \frac{10\pi}{32} < 1$ . Ainsi,  $\text{Vol}_n B(n, 1)$  croît jusqu'à  $n = 5$  puis décroît strictement. Le maximum est atteint en  $\text{Vol}_5 B(5, 1) = \frac{8}{15}\pi^2$ .

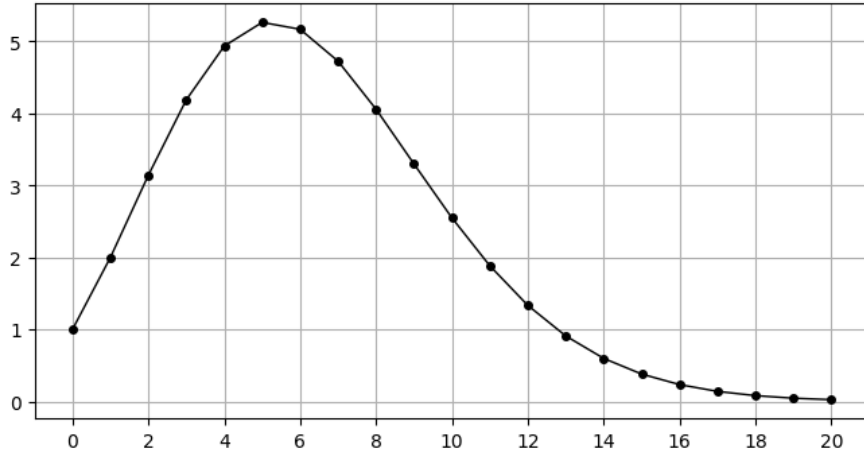


FIGURE 2 – Le volume de la boule unité en fonction de  $n$

### 3.2 La boule et le cube circonscrit

Le cube *circonscrit* à la boule  $B(n, R)$  est le cube  $C(n, R)$ . Voici, en fonction de  $n$ ,

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} = \frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{\text{Vol}_n C(n, R)}$$

Remarquons que ce quotient ne dépend pas de  $R$ .

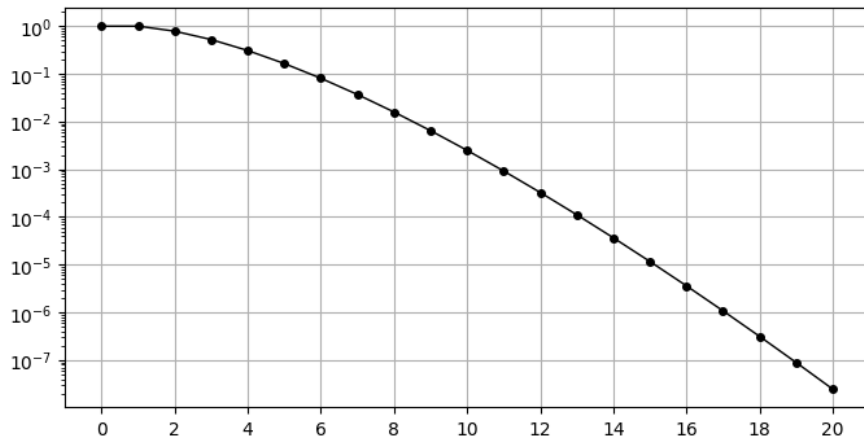


FIGURE 3 – Le quotient du volume de la boule et du volume du cube circonscrit

**Proposition 11.**

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left( \frac{\pi e}{2n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

**Démonstration.** C'est une conséquence immédiate de la proposition 9.  $\square$

**Corollaire 12.**

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2R)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, le volume de la boule est *négligeable* devant le volume du cube circonscrit ...

### 3.3 La boule et le cube inscrit

Comparons maintenant le volume de la boule de rayon  $R$  avec celui du cube *inscrit* dans la boule, c'est à dire le cube  $C(n, r)$  dont les sommets sont sur le bord de la boule. L'un des  $2^n$  sommets de ce cube est  $(r, \dots, r)$ . En reportant dans l'égalité  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2$ , il vient

$$r = \frac{R}{\sqrt{n}}$$

Le cube en question a donc pour volume

$$(2r)^n = \frac{(2R)^n}{n^{\frac{n}{2}}}$$

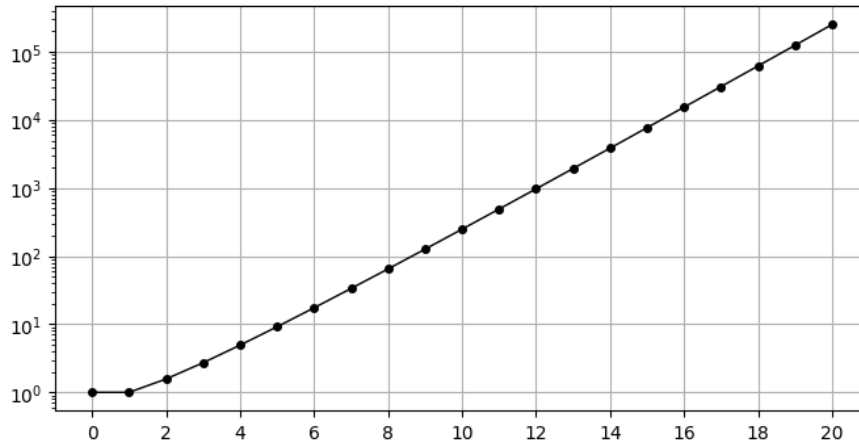


FIGURE 4 – Le quotient du volume de la boule et du volume du cube inscrit

**Proposition 13.**

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2r)^n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} (\pi e)^{\frac{n}{2}}$$

**Corollaire 14.**

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R)}{(2r)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Et donc, le volume du cube inscrit est négligeable devant le volume de la boule ...

### 3.4 Concentration du volume au bord de la boule

Soit  $0 < \varepsilon < R$ . On a

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} = \frac{(R - \varepsilon)^n}{R^n} = \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)^n$$

Le quotient des volumes tend donc vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. On peut aussi, comme ce qui a été fait pour le cube, faire dépendre  $\varepsilon$  de  $n$  en posant  $\varepsilon = \frac{\lambda R}{n}$ . On a alors

$$\frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$$

On retrouve les résultats déjà vus pour le cube : le volume de la boule  $B(n, R)$  se concentre au voisinage du bord de la boule.

### 3.5 Concentration du volume dans les hyperplans

Découpons dans la boule  $B(n, R)$  une fine tranche horizontale contenant le point  $O$ . On imagine que le volume de cette tranche sera petit par rapport au volume de la boule. En fait il n'en est rien. En grandes dimensions, *la tranche en question contiendra la quasi-totalité du volume de la boule.*

Soit  $0 < \varepsilon < R$ . Évaluons le volume de l'intersection de la boule  $B(n, R)$  avec la tranche  $-\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon$  comprise entre les deux hyperplans de  $\mathbb{R}^n$  d'équations  $x_n = \pm \varepsilon$ . Notons ce volume  $K(n, R, \varepsilon)$ . Reprenant le calcul du volume de la boule, on obtient

$$K(n, R, \varepsilon) = R^n K(n, 1, \frac{\varepsilon}{R}) = 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) \int_0^\theta \cos^n t \, dt$$

où  $\theta = \arcsin \frac{\varepsilon}{R}$  vérifie  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . On a

$$0 \leq \int_\theta^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \leq \frac{\pi}{2} \cos^n \theta = o(W_n)$$

puisque  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ . Ainsi,

$$W_n = \int_0^\theta \cos^n t \, dt + o(W_n)$$

et donc

$$K(n, R, \varepsilon) \sim 2R^n \text{Vol}_{n-1} B(n-1, 1) W_n = \text{Vol}_n B(n, R)$$

Dit autrement,

$$\frac{K(n, R, \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Le volume de la boule unité est concentré dans une tranche d'épaisseur  $2\varepsilon$  autour de l'hyperplan  $H_n$  d'équation  $x_n = 0$ .

Cette propriété est remarquable en elle-même, mais il y a mieux : soit  $H$  un hyperplan vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe une isométrie vectorielle de  $\mathbb{R}^n$  qui envoie  $H$  sur l'hyperplan  $H_n$ . Cette isométrie envoie alors la bande d'épaisseur  $2\varepsilon$  autour de  $H_n$  sur la tranche d'épaisseur  $2\varepsilon$  autour de  $H$ . Comme la boule est invariante par les isométries vectorielles, le résultat précédent reste valable :

**Proposition 15.** *Le volume de la boule  $B(n, R)$  est concentré dans la tranche d'épaisseur  $2\varepsilon$  centrée en n'importe quel hyperplan vectoriel  $H$  de  $\mathbb{R}^n$ .*

### 3.6 Surface du bord la boule

Terminons cette article en parlant, comme nous l'avons fait pour les cubes, du bord de la boule.

Donnons nous un réel  $\varepsilon > 0$  et considérons le volume compris entre les boules  $B(n, R - \varepsilon)$  et  $B(n, R)$ . Ce volume est

$$L(n, R, \varepsilon) = \text{Vol}_n B(n, R) - \text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon) = \text{Vol}_n B(n, R) \left( 1 - \frac{\text{Vol}_n B(n, R - \varepsilon)}{\text{Vol}_n B(n, R)} \right)$$

Le calcul a déjà été fait un peu plus haut :

$$L(n, R, \varepsilon) = \text{Vol}_n B(n, R) \left( 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon}{R} \right)^n \right)$$

Lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, on a donc

$$L(n, R, \varepsilon) \sim \text{Vol}_n B(n, R) \frac{n\varepsilon}{R}$$

Le bord de la boule  $B(n, R)$  est la *sphère* de centre  $O$  et de rayon  $R$  :

$$\partial B(n, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(O, x) = R\}$$

Cette sphère est une *variété* de dimension  $n - 1$ . Il est possible de définir son volume, que nous appellerons la surface de la boule. Admettons ici le résultat que nous avons démontré pour les cubes : la surface de la boule est la limite lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  de  $\frac{1}{\varepsilon} L(n, R, \varepsilon)$ . On a donc

$$\text{Surf}_n B(n, R) = \frac{n}{R} \text{Vol}_n B(n, R)$$

L'équivalent de  $\text{Vol}_n B(n, R)$  donné par la proposition 9 nous donne immédiatement un équivalent de  $\text{Surf}_n B(n, R)$ .

**Proposition 16.**

$$\text{Surf}_n B(n, R) \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}} \left( \frac{2\pi e}{n} \right)^{\frac{n}{2}} R^{n-1}$$

Sans surprise (?),  $\text{Surf}_n B(n, R)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini.

|                     |                        |             |                          |                        |                           |
|---------------------|------------------------|-------------|--------------------------|------------------------|---------------------------|
| $n$                 | 0                      | 1           | 2                        | 3                      | 4                         |
| $\mathcal{S}(n, R)$ | —                      | 2           | $2\pi R$                 | $4\pi R^2$             | $2\pi^2 R^3$              |
| $n$                 | 5                      | 6           | 7                        | 8                      | 9                         |
| $\mathcal{S}(n, R)$ | $\frac{8}{3}\pi^2 R^4$ | $\pi^3 R^5$ | $\frac{16}{15}\pi^3 R^6$ | $\frac{1}{3}\pi^4 R^7$ | $\frac{32}{105}\pi^4 R^8$ |

FIGURE 5 – Quelques valeurs de  $\text{Surf}_n B(n, R)$