

La méthode d'intégration du point milieu

Marc Lorenzi

12 mai 2023

La *méthode du point milieu* est un cas particulier de la méthode des rectangles, qui permet le calcul de valeurs approchées d'intégrales.

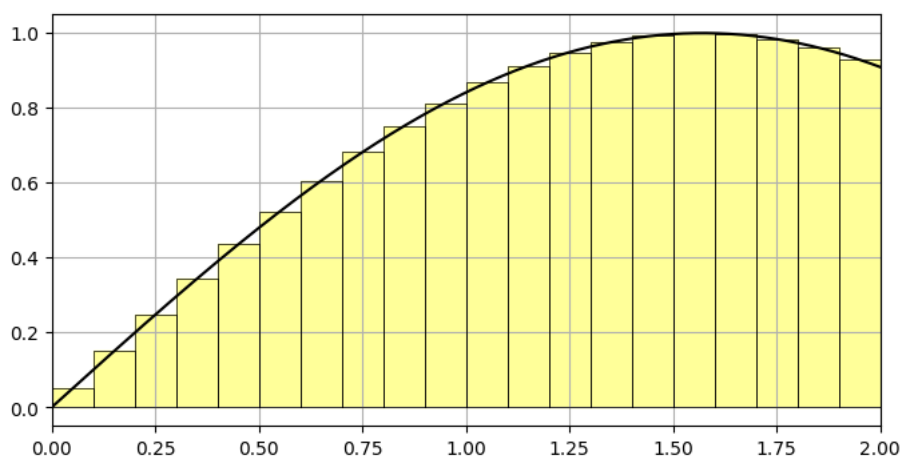


FIGURE 1 – La méthode du point milieu

1 Un cas particulier

1.1 L'idée de la méthode

Nous allons tout d'abord considérer des fonctions définies sur $[-1, 1]$. Pour toute fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, notons

$$I(f) = 2f(0)$$

Le réel $I(f)$ est l'aire (algébrique) du rectangle de base $[-1, 1]$ et de hauteur $f(0)$. Notre espoir est que $I(f)$ soit une valeur approchée de $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

La clé de l'étude d'une méthode d'intégration approchée est souvent de regarder son comportement sur les polynômes. Pour $k = 0, 1, 2$, soit $f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $f_k(x) = x^k$. On a

$$I(f_0) = 2 = \int_{-1}^1 f_0(x) dx \text{ et } I(f_1) = 0 = \int_{-1}^1 f_1(x) dx$$

Par linéarité, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$, $I(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$. En revanche,

$$0 = I(f_2) \neq \int_{-1}^1 f_2(x) dx = \frac{2}{3}$$

La méthode du point milieu est ce que l'on appelle une *méthode de quadrature d'ordre 1* : elle permet d'intégrer de façon exacte tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, et il existe un polynôme de degré 2 qui n'est pas intégré exactement.

1.2 Le noyau de Peano

Soit $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$. Soit $x \in [-1, 1]$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f entre -1 et x à l'ordre 1.

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

où

$$P(x) = f(-1) + (x + 1)f'(-1)$$

et

$$R(x) = \int_{-1}^x (x - t)f''(t) dt$$

Pour tout réel x , notons $x_+ = x$ si $x \geq 0$ et $x_+ = 0$ si $x < 0$. La clé des calculs qui vont suivre est de remarquer que

$$R(x) = \int_{-1}^1 (x - t)_+ f''(t) dt$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(x) dx &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x - t)_+ f''(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x - t)_+ dx \right) f''(t) dt \end{aligned}$$

On a également

$$I(R) = 2R(0) = 2 \int_{-1}^1 (-t)_+ f''(t) dt$$

De là,

$$\int_{-1}^1 R(x) dx - I(R) = \int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt$$

où

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \int_{-1}^1 (x-t)_+ dx - 2(-t)_+ \\
 &= \int_t^1 (x-t) dx - 2(-t)_+ \\
 &= \frac{1}{2} [(x-t)^2]_t^1 - 2(-t)_+ \\
 &= \frac{1}{2} (1-t)^2 - 2(-t)_+
 \end{aligned}$$

La fonction G s'appelle le *noyau de Peano*. En distinguant selon que t est positif ou négatif, on obtient facilement une expression de $G(t)$.

- Si $t \in [-1, 0]$,

$$G(t) = \frac{1}{2}(1+t)^2$$

- Si $t \in [0, 1]$,

$$G(t) = \frac{1}{2}(1-t)^2$$

Remarquons que les deux expressions sont valables lorsque $t = 0$. En fait, la fonction $t \mapsto t_+$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction G est continue sur $[-1, 1]$.

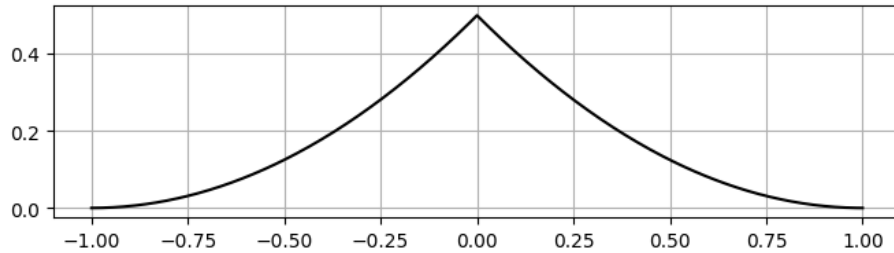


FIGURE 2 – Le noyau de Peano

1.3 Estimation de l'erreur

Comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, on a

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = I(P)$$

De là,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - I(f) = \int_{-1}^1 R(x) dx - I(R) = \int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt$$

La fonction G est positive sur $[-1, 1]$ et la fonction f'' est continue. Par la première formule de la moyenne, il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt = f''(\xi) \int_{-1}^1 G(t) dt$$

L'intégrale vaut

$$\int_{-1}^1 G(t) dt = 2 \int_0^1 G(t) dt = \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{3}$$

Nous venons de montrer le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$. Il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = I(f) + \frac{1}{3} f''(\xi)$$

1.4 Fonctions définies sur un segment quelconque

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Notons

$$m = \frac{a+b}{2} \text{ et } \delta = \frac{b-a}{2}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. La fonction $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = m + \delta t$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[a, b]$. Posons $\widehat{f} = f \circ \varphi$. La fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$ et $\widehat{f}' = \delta(f' \circ \varphi)$, $\widehat{f}'' = \delta^2(f'' \circ \varphi)$.

Par le changement de variable $x = \varphi(t)$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \delta \int_{-1}^1 \widehat{f}(t) dt$$

Par la proposition 1, il existe $\zeta \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 \widehat{f}(t) dt = I(\widehat{f}) + \frac{1}{3} \widehat{f}''(\zeta)$$

Posons $\xi = \varphi(\zeta)$. On a

$$\widehat{f}''(\zeta) = \delta^2 f''(\xi)$$

De plus,

$$I(\widehat{f}) = 2\widehat{f}(0) = 2f(m)$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = 2\delta f(m) + \frac{\delta^3}{3} f''(\xi)$$

Nous venons de prouver le résultat suivant.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi)$$

2 La méthode composée

2.1 Subdivisions

Comme dans la section précédente, a et b sont deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la subdivision régulière $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ où

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons m_k le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$. Par la proposition 2, il existe $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = (x_{k+1} - x_k)f(m_k) + \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{24}f''(\xi_k)$$

Sommons sur k .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)f(m_k) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{24}f''(\xi_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} S \end{aligned}$$

où

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$$

La somme S est un barycentre à coefficients positifs de valeurs prises par f'' . Comme f'' est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $S = f''(\xi)$.

Proposition 3. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\xi)$$

2.2 L'erreur en pratique

Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, notons $E_n(f)$ l'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la somme de la méthode du point milieu :

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)$$

En notant M le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$, on a

$$|E_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

On a donc une erreur en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Prenons par exemple $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. On a dans ce cas $M = e$ et la majoration de l'erreur devient

$$|E_n(f)| \leq \frac{e}{24n^2}$$

Si on désire une erreur inférieure 10^{-10} , il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{e}{24n^2} \leq 10^{-10}$$

c'est à dire

$$n \geq \left\lceil \sqrt{\frac{e}{24}} 10^5 \right\rceil + 1 = 33655$$

On obtient avec cette valeur de n , $E_n \simeq 6.3 \times 10^{-11}$. Par une simulation numérique, on trouve que la plus petite valeur de n pour laquelle l'erreur est inférieure à 10^{-10} est $n = 26759$.

On peut ici calculer explicitement E_n . Tout d'abord,

$$\int_0^1 f(x) dx = e - 1$$

Calculons la somme associée à la méthode du point milieu.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2n}\right) \frac{e - 1}{\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1} \end{aligned}$$

De là,

$$E_n = (e - 1) \left(1 - \frac{\exp\left(\frac{1}{2n}\right)}{n \left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \right)} \right)$$

On a, en faisant un développement limité de l'exponentielle,

$$\begin{aligned} n \left(\exp \left(\frac{1}{n} \right) - 1 \right) - \exp \left(\frac{1}{2n} \right) &= n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + o \left(\frac{1}{n^3} \right) \right) \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{24n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini,

$$E_n(f) \sim \frac{e-1}{24n^2}$$

La plus petite valeur de n pour laquelle l'équivalent est inférieur à 10^{-10} est $n = 26758$, valeur extrêmement proche de celle que nous avons trouvée avec la simulation. Ci-dessous, en noir l'erreur réelle et en rouge le majorant de l'erreur.

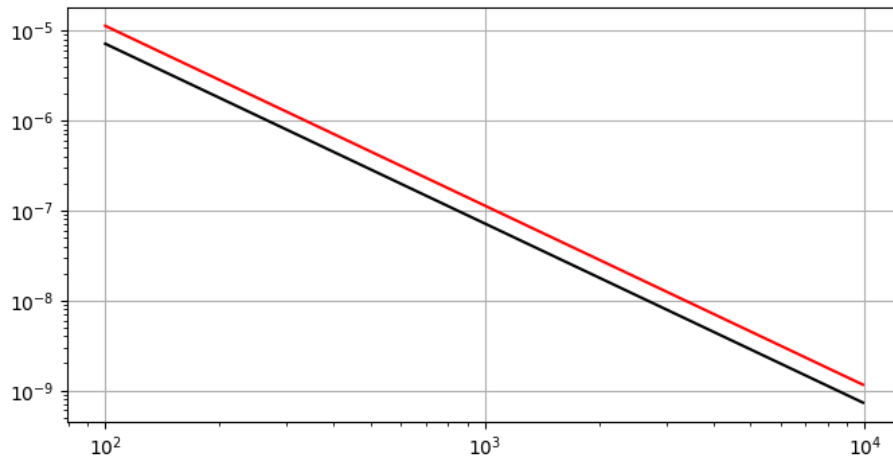


FIGURE 3 – L'erreur et son majorant