

La méthode d'intégration des rectangles

Marc Lorenzi

13 mai 2023

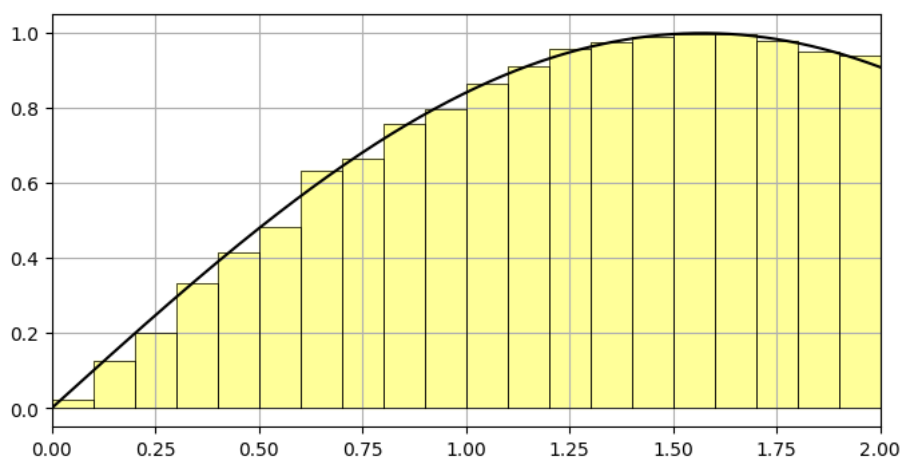


FIGURE 1 – La méthode des rectangles

1 Un cas particulier

1.1 L'idée de la méthode

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $c \in [a, b]$. Pour toute fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, notons

$$I(f) = (b - a)f(c)$$

Le réel $I(f)$ est l'aire (algébrique) du rectangle de base $[a, b]$ et de hauteur $f(c)$. Notre espoir est que $I(f)$ soit une valeur approchée de $\int_a^b f(x) dx$.

La clé de l'étude d'une méthode d'intégration approchée est souvent de regarder son comportement sur les polynômes. Pour $k = 0, 1, 2$, soit $f_k : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k$. On a

$$I(f_0) = b - a = \int_a^b f_0(x) dx$$

On a également

$$I(f_1) = (b-a)c \text{ et } \int_a^b f_1(x) dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

Si $c \neq \frac{1}{2}(a+b)$, ces deux réels sont différents.

Si, au contraire, $c = \frac{1}{2}(a+b)$, ils sont égaux. Dans ce cas,

$$I(f_2) = \frac{1}{4}(b-a)(a+b)^2$$

et

$$\int_a^b f_2(x) dx = \frac{1}{3}(b-a)(a^2 + ab + b^2)$$

Il en résulte

$$\int_a^b f_2(x) dx - I(f_2) = \frac{1}{12}(b-a)^3 \neq 0$$

Par linéarité,

- Si $c \neq \frac{1}{2}(a+b)$, pour tout polynôme P constant, $I(P) = \int_a^b P(x) dx$ et il existe un polynôme de degré 1 qui n'est pas intégré exactement.
- Si $c = \frac{1}{2}(a+b)$, pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 1, $I(P) = \int_a^b P(x) dx$ et il existe un polynôme de degré 2 qui n'est pas intégré exactement.

la méthode des rectangles est ce que l'on appelle une *méthode de quadrature d'ordre 0* : elle permet d'intégrer de façon exacte tous les polynômes constants, Lorsque $c = \frac{1}{2}(a+b)$, la méthode s'appelle la *méthode du point milieu*. C'est alors une méthode d'ordre 1. Nous étudierons la méthode du point milieu dans un autre article.

1.2 Le noyau de Peano

Pour tout réel x , notons $H(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $H(x) = 1$ si $x > 0$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Soit $x \in [a, b]$. On a, par le théorème fondamental du calcul intégral,

$$f(x) = f(a) + R(x)$$

où

$$R(x) = \int_a^x f'(t) dt$$

La clé des calculs qui vont suivre est de remarquer qu'on peut écrire

$$R(x) = \int_a^b H(x-t)f'(t) dt$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_a^b R(x) dx &= \int_a^b \left(\int_a^b H(x-t) f'(t) dt \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b H(x-t) dx \right) f'(t) dt\end{aligned}$$

On a également

$$I(R) = (b-a)R(c) = (b-a) \int_a^b H(c-t) f'(t) dt$$

De là,

$$\int_a^b R(x) dx - I(R) = \int_a^b G(t) f'(t) dt$$

où

$$\begin{aligned}G(t) &= \int_a^b H(x-t) dx - (b-a)H(c-t) \\ &= \int_t^b H(x-t) dx - (b-a)H(c-t) \\ &= b-t - (b-a)H(c-t)\end{aligned}$$

La fonction G s'appelle le *noyau de Peano*. On a plus précisément

- Si $t \in [a, c]$, $G(t) = a - t$.
- Si $t \in [c, b]$, $G(t) = b - t$.

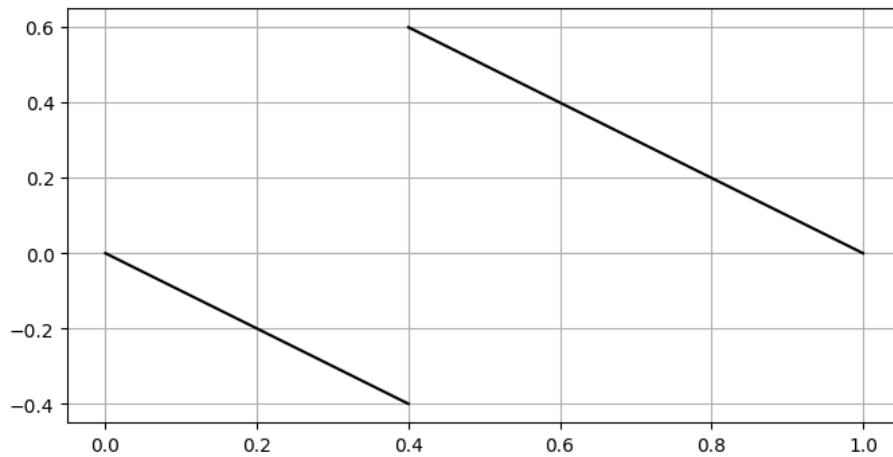


FIGURE 2 – Le noyau de Peano pour $a = 0, b = 1, c = 0.4$

Le noyau de Peano est une fonction affine par morceaux, discontinue en c , sauf si $c = a$. Cette fonction n'est pas de signe constant, sauf si $c = a$ ou $c = b$.

Dans la suite, nous prendrons $c = a$. On a donc

$$I(f) = (b - a)f(a)$$

Pour tout $t \in [a, b]$,

$$G(t) = b - t$$

1.3 Estimation de l'erreur

On a

$$\int_a^b f(x) dx - I(f) = \int_a^b R(x) dx - I(R) = \int_a^b G(t)f'(t) dt$$

Pour tout $t \in [a, b]$, $G(t) = b - t \geq 0$. De plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$. Par la première formule de la moyenne, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\begin{aligned} \int_a^b G(t)f'(t) dt &= f'(\xi) \int_a^b G(t) dt \\ &= f'(\xi) \int_a^b (b - t) dt \\ &= -\frac{1}{2}f'(\xi) [(b - t)^2]_a^b \\ &= \frac{1}{2}(b - a)^2 f'(\xi) \end{aligned}$$

Nous venons de montrer le résultat suivant.

Proposition 1. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = I(f) + \frac{1}{2}(b - a)^2 f'(\xi)$$

1.4 Exemples

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. La fonction f' est constante, égale à 1, et

$$\int_a^b f(x) dx - (b - a)f(a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - (b - a)a = \frac{1}{2}(b - a)^2$$

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx - (b-a)f(a) &= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) - (b-a)a^2 \\ &= \frac{1}{3}(b-a)(-2a^2 + ab + b^2) \\ &= \frac{1}{3}(b-a)^2(2a+b) \\ &= \frac{1}{2}(b-a)^2(2\xi) \end{aligned}$$

où

$$\xi = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$$

Remarquons qu'effectivement, $\xi \in [a, b]$.

2 La formule composée

2.1 Subdivisions

Comme dans la section précédente, a et b désignent deux réels tels que $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Soit $n \geq 1$. Considérons la subdivision régulière $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ où

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Par la proposition 1, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ tel que

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = (x_{k+1} - x_k)f(x_k) + \frac{1}{2}(x_{k+1} - x_k)^2 f'(\xi_k)$$

En sommant, on obtient

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)f(x_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)^2 f'(\xi_k) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{(b-a)^2}{2n} S \end{aligned}$$

où

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)$$

La somme S est un barycentre à coefficients positifs de valeurs prises par f' . Comme f' est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $S = f'(\xi)$.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Soit $n \geq 1$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$$

Exemple. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Soit $n \geq 1$. En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = \frac{k}{n}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \frac{1}{3} - \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \\ &= \frac{3n-1}{6n^2} \\ &= \frac{1}{2n} 2\xi \end{aligned}$$

où

$$\xi = \frac{1}{2} - \frac{1}{6n}$$

Exemple. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Soit $n \geq 1$. En reprenant les notations ci-dessus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = \frac{k}{n}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^3 \\ &= \frac{(n-1)^2}{4n} \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) &= \frac{1}{4} - \frac{(n-1)^2}{4n^2} \\ &= \frac{2n-1}{4n^2} \\ &= \frac{1}{2n} f'(\xi) \end{aligned}$$

où

$$\xi = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{6n}}$$

2.2 L'erreur en pratique

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $E_n(f)$ l'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la somme de la méthode des rectangles :

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$$

On a donc

$$E_n(f) = \frac{(b-a)^2}{2n} f'(\xi)$$

où $\xi \in [a, b]$. Dans la pratique du calcul numérique des intégrales, il s'agit de connaître un majorant explicite de l'erreur. En notant M le maximum de $|f'|$ sur $[a, b]$,

$$|E_n(f)| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}$$

Prenons un exemple. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x$. On a $M = e$ et donc

$$|E_n(f)| \leq \frac{e}{2n}$$

Si on désire une erreur inférieure à 10^{-5} , il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{e}{2n} \leq 10^{-5}$$

c'est à dire

$$n \geq \left\lfloor \frac{10^5 e}{2} \right\rfloor + 1 = 135915$$

Quelle est la valeur exacte de E_n pour notre exemple ? On a

$$\begin{aligned} E_n &= e - 1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k}{n}} \\ &= e - 1 - \frac{1}{n} \frac{e - 1}{e^{\frac{1}{n}} - 1} \\ &= (e - 1) \frac{n(e^{\frac{1}{n}} - 1) - 1}{n(e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\ &\sim \frac{e - 1}{2n} \end{aligned}$$

Notre majorant est donc pessimiste d'un facteur $\frac{e}{e-1} \simeq 1.6$. Pour $n = 135915$, $E_n = 6.3 \times 10^{-6}$. La plus petite valeur de n pour laquelle $|E_n|$ est inférieure à 10^{-5} est en fait $n = 85914$.

Le graphique ci-dessous représente, pour notre exemple l'erreur $E_n(f)$ en fonction de n (en noir) et le majorant $\frac{e}{2n}$ (en rouge).

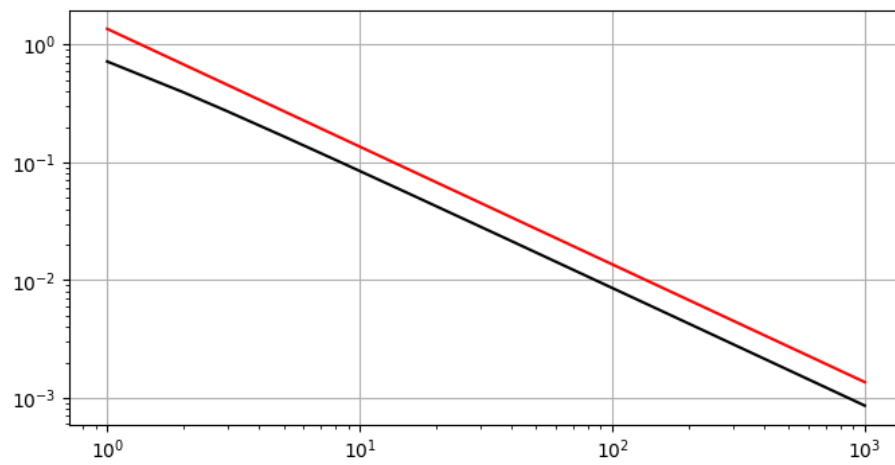


FIGURE 3 – L'erreur et son majorant