

La méthode d'intégration des trapèzes

Marc Lorenzi

12 mai 2023

La *méthode des trapèzes* est un cas particulier de la méthode des rectangles, qui permet le calcul de valeurs approchées d'intégrales.

1 Un cas particulier

1.1 L'idée de la méthode

Nous allons tout d'abord considérer des fonctions définies sur $[-1, 1]$. Pour toute fonction $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, notons

$$I(f) = f(-1) + f(1)$$

Le réel $I(f)$ est l'aire (algébrique) du trapèze de base $[-1, 1]$ et de hauteurs $f(-1)$ et $f(1)$. Notre espoir est que $I(f)$ soit une valeur approchée de $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

La clé de l'étude d'une méthode d'intégration approchée est souvent de regarder son comportement sur les polynômes. Pour $k = 0, 1, 2$, soit $f_k : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_k(x) = x^k$. On a

$$I(f_0) = 2 = \int_{-1}^1 f_0(x) dx \text{ et } I(f_1) = 0 = \int_{-1}^1 f_1(x) dx$$

Par linéarité, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_1[X]$, $I(P) = \int_{-1}^1 P(x) dx$. En revanche,

$$2 = I(f_2) \neq \int_{-1}^1 f_2(x) dx = \frac{2}{3}$$

La méthode du point milieu est ce que l'on appelle une *méthode de quadrature d'ordre 1* : elle permet d'intégrer de façon exacte tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 1, et il existe un polynôme de degré 2 qui n'est pas intégré exactement.

1.2 Le noyau de Peano

Soit $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$. Soit $x \in [-1, 1]$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à f entre -1 et x à l'ordre 1.

$$f(x) = P(x) + R(x)$$

où

$$P(x) = f(-1) + (x + 1)f'(-1)$$

et

$$R(x) = \int_{-1}^x (x - t)f''(t) dt = \int_{-1}^1 (x - t)_+ f''(t) dt$$

On a, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R(x) dx &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x - t)_+ f''(t) dt \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 (x - t)_+ dx \right) f''(t) dt \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} I(R) &= R(-1) + R(1) \\ &= \int_{-1}^1 ((-1 - t)_+ + (1 - t)_+) f''(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (1 - t) f''(t) dt \end{aligned}$$

De là,

$$\int_{-1}^1 R(x) dx - I(R) = \int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt$$

où

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_{-1}^1 (x - t)_+ dx - (1 - t) \\ &= \int_t^1 (x - t) dx - (1 - t) \\ &= \frac{1}{2} [(x - t)^2]_t^1 - (1 - t) \\ &= \frac{1}{2} (1 - t)^2 - (1 - t) \\ &= -\frac{1}{2} (1 - t)(1 + t) \end{aligned}$$

La fonction G s'appelle le *noyau de Peano*.

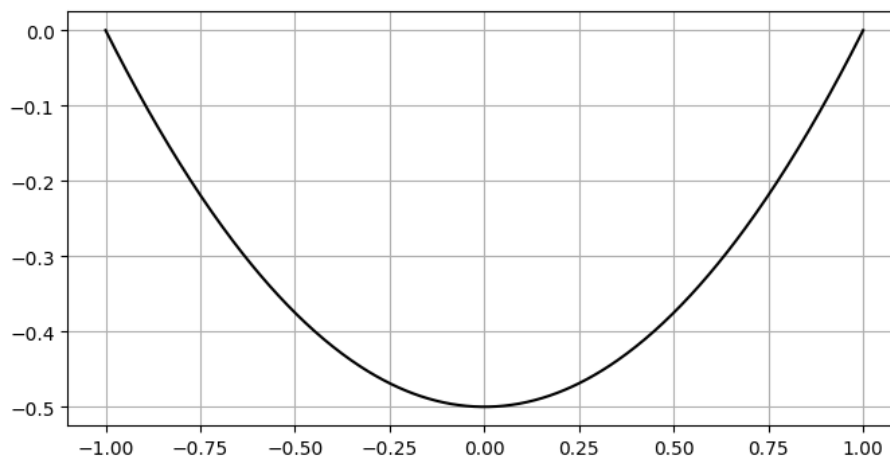


FIGURE 1 – Le noyau de Peano

1.3 Estimation de l'erreur

Comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, on a

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = I(P)$$

De là,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - I(f) = \int_{-1}^1 R(x) dx - I(R) = \int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt$$

Par la première formule de la moyenne, il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 G(t) f''(t) dt = f''(\xi) \int_{-1}^1 G(t) dt$$

On a

$$\int_{-1}^1 G(t) dt = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt = -\frac{2}{3}$$

Nous venons donc de montrer le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit $f \in \mathcal{C}^2([-1, 1])$. Il existe $\xi \in [-1, 1]$ tel que*

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = I(f) - \frac{2}{3} f''(\xi)$$

2 Fonctions définies sur un segment quelconque

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Notons

$$c = \frac{a+b}{2} \text{ et } \delta = \frac{b-a}{2}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. La fonction $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = c + \delta t$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur $[a, b]$. Posons $\widehat{f} = f \circ \varphi$. La fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1, 1]$ et $\widehat{f}' = \delta(f' \circ \varphi)$, $\widehat{f}'' = \delta^2(f'' \circ \varphi)$.

Par le changement de variable $x = \varphi(t)$, on a

$$\int_a^b f(x) dx = \delta \int_{-1}^1 \widehat{f}(t) dt$$

Par la proposition précédente, il existe $\zeta \in [-1, 1]$ tel que

$$\int_{-1}^1 \widehat{f}(t) dt = I(\widehat{f}) - \frac{2}{3} \widehat{f}''(\zeta)$$

Posons $\xi = \varphi(\zeta)$. On a

$$\widehat{f}''(\zeta) = \delta^2 f''(\xi)$$

De plus,

$$I(\widehat{f}) = \widehat{f}(-1) + \widehat{f}(1) = f(a) + f(b)$$

Ainsi,

$$\int_a^b f(x) dx = \delta(f(a) + f(b)) - \frac{2\delta^3}{3} f''(\xi)$$

Nous venons donc de prouver le résultat suivant.

Proposition 2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi)$$

Nous noterons dorénavant

$$I(f, a, b) = \frac{1}{2}(b-a)(f(a) + f(b))$$

3 Itérations

3.1 subdivisions

Conservons les notations de la section précédente. Soit $n \geq 1$. Considérons la subdivision régulière $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ où

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons c_k le milieu du segment $[x_k, x_{k+1}]$. On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} I(f, x_k, x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1} - x_k)^3}{12} f''(\xi_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} I(f, x_k, x_{k+1}) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} S \end{aligned}$$

où

$$S = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$$

La somme S est un barycentre à coefficients positifs de valeurs prises par f'' . Comme f'' est continue sur $[a, b]$, le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $S = f''(\xi)$.

Proposition 3. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$. Soit $n \geq 1$. Il existe $\xi \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} I(f, x_k, x_{k+1}) - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)$$

3.2 La somme des trapèzes

Posons

$$I_n(f, a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} I(f, x_k, x_{k+1})$$

On a

$$\begin{aligned} I_n(f, a, b) &= \frac{b-a}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \right) \\ &= \frac{b-a}{2n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \sum_{k=1}^n f(x_k) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + \frac{b-a}{2n} (f(a) + f(b)) \end{aligned}$$

La figure ci-dessous représente graphiquement la méthode des trapèzes pour la fonction $f_0 : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = e^x$. On a pris $n = 7$.

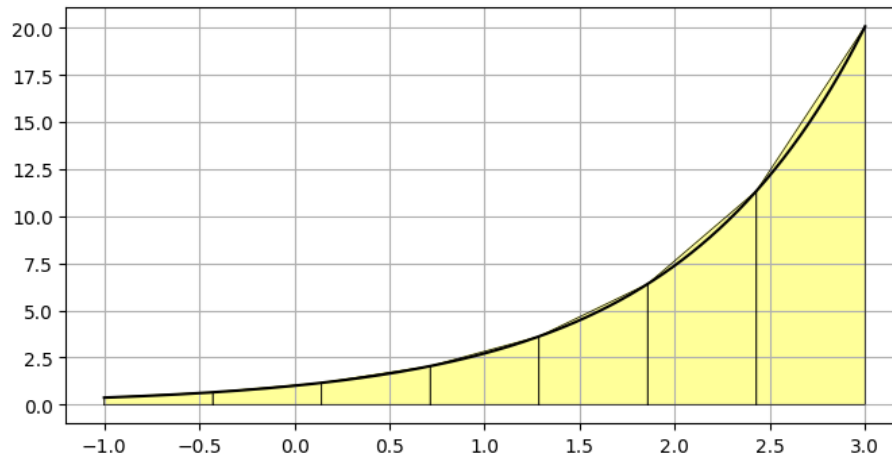


FIGURE 2 – La méthode du point milieu

Pour une fonction quelconque $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, notons $E_n(f)$ l'erreur commise en approchant l'intégrale de f par la somme de la méthode du point milieu :

$$E_n(f) = \left| \int_a^b f(x) dx - I_n(f, a, b) \right|$$

En notant M le maximum de $|f''|$ sur $[a, b]$, on a

$$E_n(f) \leq \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$$

On a donc une erreur en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour reprendre l'exemple de la fonction f_0 ci-dessus, on a $M = e^3$ et

$$E_n(f_0) \leq \frac{16e^3}{3n^2}$$

Si on désire une erreur inférieure 10^{-10} , il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{16e^3}{3n^2} \leq 10^{-10}$$

c'est à dire

$$n \geq \left\lceil \sqrt{\frac{16e^3}{3}} 10^5 \right\rceil + 1 = 160744$$

Il est facile de faire une simulation numérique. La fonction `point_milieu` prend en paramètres une fonction f , deux réels a et b , ainsi qu'un entier n . Elle renvoie $I_n(f, a, b)$ (ou plutôt un flottant approchant cette quantité).

```
def trapezes(f, a, b, n):
    d = (b - a) / n
    s = 0
    for k in range(n):
        s += d * f(a + k * d)
    return s + d * (f(b) - f(a)) / 2
```

Avec notre exemple, la simulation fournit une erreur réelle de 2.4×10^{-11} . La plus petite valeur de n pour laquelle l'erreur réelle est inférieure à 10^{-10} est $n = 512560$.