

$\mathbb{C}$

Marc Lorenzi

22 septembre 2022

Il existe de nombreuses constructions de l'ensemble des nombres complexes à partir de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. Nous allons ici en présenter une, en utilisant des matrices. C'est sans doute celle qui permet d'arriver le plus rapidement, sans utiliser de résultats sophistiqués, à ce que nous voulons.

1 Les nombres complexes

Posons

$$\mathbb{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Proposition 1. $\mathbb{C}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées 2×2 à coefficients réels.

Démonstration. Pour tous réels x, y , notons

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Soient $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$. On a

$$M(x, y) + M(x', y') = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} = M(x + x', y + y') \in \mathbb{C}$$

De même,

$$\begin{aligned} M(x, y)M(x', y') &= \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & -y' \\ y' & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -xy' - x'y \\ xy' + x'y & -xy' - x'y \end{pmatrix} \\ &= M(xx' - yy', xy' + x'y) \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

L'élément neutre pour la multiplication des matrices est $I_2 = M(1, 0)$. On a donc $I_2 \in \mathbb{C}$.

Remarquons enfin que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\lambda M(x, y) = M(\lambda x, \lambda y) \in \mathbb{C}$$

Ainsi, $\mathbb{C}$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La commutativité de la multiplication dans $\mathbb{C}$ est une simple vérification. $\square$

Proposition 2. *La $\mathbb{R}$ -algèbre $\mathbb{C}$ est de dimension 2.*

Démonstration. Trouvons une base du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$M(x, y) = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = xM(1, 0) + yM(0, 1)$$

Ainsi, la famille $(M(1, 0), M(0, 1))$ engendre $\mathbb{C}$. Cette famille est clairement libre, donc c'est une base de $\mathbb{C}$, qui est ainsi un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 2. $\square$

2 Nouvelles notations

Notons plus simplement, à partir de maintenant, $1 = M(1, 0)$ et $i = M(0, 1)$. Avec ces nouvelles notations, $(1, i)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$. Comme dans toute $\mathbb{R}$ -algèbre, la droite $\langle 1 \rangle$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ isomorphe à $\mathbb{R}$, que nous identifierons dorénavant à $\mathbb{R}$. Avec cette identification, on a donc $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit maintenant de façon unique $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

Remarquons que

$$i^2 = M(0, 1)^2 = -M(1, 0) = -1$$

Les opérations sur les nombres complexes s'écrivent, avec les nouvelles notations,

$$\begin{aligned} (x + iy) + (x' + iy') &= (x + x') + i(y + y') \\ (x + iy)(x' + iy') &= (xx' - yy') + i(xy' + x'y) \end{aligned}$$

3 Structure de corps

Proposition 3. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps.

Démonstration. Tout d'abord, $1 = M(1, 0) \neq 0 = M(0, 0)$. Passons au plus important. Soit $z \neq 0$ un élément de $\mathbb{C}$. Écrivons $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$ et $(x, y) \neq (0, 0)$. Posons

$$z' = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

On a

$$\begin{aligned}
 zz' &= \frac{(x+iy)(x-iy)}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{x^2 - i^2 y^2}{x^2+y^2} \\
 &= \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ainsi, z est inversible pour la multiplication dans $\mathbb{C}$ et son inverse est z' . $\square$

4 Unicité

Proposition 4. *Il existe à isomorphisme près une unique $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension 2 qui est un corps.*

Démonstration. Tout ce qui précède prouve l'existence. Il nous reste à montrer l'unicité. Soit $\mathbb{A}$ une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension 2 qui est un corps. On a $1 \neq 0$. Par le théorème de la base incomplète, il existe $\omega \in \mathbb{A}$ tel que $\mathcal{B} = (1, \omega)$ soit une base de $\mathbb{A}$. Remarquons que comme $\mathcal{B}$ est libre, $\omega \notin \mathbb{R}$.

Facilement, $\mathbb{A}$ est une algèbre commutative.

Considérons ω^2 . C'est un élément de $\mathbb{A}$, il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\omega^2 = a\omega + b$$

De là,

$$\left(\omega - \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4} = D$$

Trois cas surviennent.

- Cas 1, $D = 0$. On a alors

$$\left(\omega - \frac{a}{2}\right)^2 = 0$$

Comme $\omega \notin \mathbb{R}$, on a $z = \omega - \frac{a}{2} \neq 0$. Pourtant $z^2 = 0$. L'algèbre $\mathbb{A}$ possède donc un élément nilpotent, ce qui est impossible puisque $\mathbb{A}$ est un corps.

- Cas 1, $D > 0$. Posons $D = d^2$ où $d \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\left(\omega - \frac{a}{2}\right)^2 = d^2$$

En posant

$$\alpha = \frac{1}{d} \left(\omega - \frac{a}{2}\right)$$

on a donc $\alpha^2 = 1$. Remarquons que $\alpha \notin \mathbb{R}$. Le réel 1 possède donc au moins trois racines carrées, allez, même 4, distinctes : 1, -1 , α et $-\alpha$. C'est impossible, puisque $\mathbb{A}$ est un corps, et donc tout élément de $\mathbb{A}$ a au plus deux racines carrées.

La cas numéro 3 est donc le bon. On a nécessairement $D < 0$. Posons $D = -d^2$ où $d \in \mathbb{R}_+^*$. En posant

$$j = \frac{1}{d} \left(\omega - \frac{a}{2} \right)$$

on a alors $j^2 = -1$. Comme j n'est pas réel, la famille $(1, j)$ est libre. Étant de cardinal 2, cette famille est une base de $\mathbb{A}$.

Résumons-nous. On a $C = \text{Vect}(1, i)$ où $i^2 = -1$ et $\mathbb{A} = \text{Vect}(1, j)$ où $j^2 = -1$. Il est alors facile de voir que l'application $x + iy \mapsto x + jy$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{A}$.

□