

La dilatation des temps ou le pourquoi du v^2

On considère deux référentiels galiléens.

- Un référentiel $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z, t)$ « fixe ».
- Un référentiel $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', x', y', z', t')$ « mobile ».

Le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace parallèlement à l'axe $\mathcal{O}x$ à la vitesse v . Les axes $\mathcal{O}y$ et $\mathcal{O}'y'$ restent parallèles et idem pour $\mathcal{O}z$ et $\mathcal{O}'z'$.

On suppose aussi qu'à l'instant $t = 0$, on a $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ et $t' = 0$.

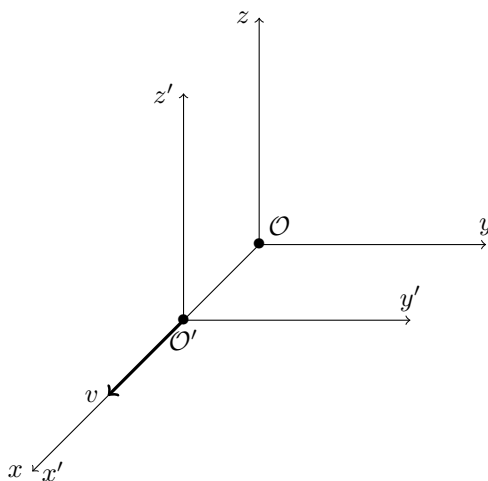


FIGURE 1 – Les référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$

Un observateur « mobile » est placé en $\mathcal{O}'$. Nous l'appellerons le physicien $\mathcal{O}'$. Il effectue l'expérience suivante. À l'instant $t' = 0$ il envoie un photon verticalement (c'est à dire dans la direction de $\mathcal{O}'z'$) à une certaine hauteur h et il mesure le temps t' mis par le photon pour arriver à cette hauteur. Le photon se déplace à la vitesse de la lumière c . Comme

$$\text{distance} = \text{vitesse} \times \text{temps}$$

on a l'égalité

$$h = ct'$$

La figure 2 montre l'expérience dans le référentiel $\mathcal{R}'$. En gras, la trajectoire du photon. Le carré noir indique la position du photon à l'instant t' de son arrivée à la hauteur h .

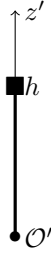


FIGURE 2 – L'expérience dans le référentiel $\mathcal{R}'$

Supposons maintenant qu'un observateur se trouve au point $\mathcal{O}$ du référentiel $\mathcal{R}$. Nous l'appellerons le physicien $\mathcal{O}$. Que devient pour $\mathcal{O}$ l'expérience du physicien $\mathcal{O}'$? À l'instant $t = 0$ (car on a supposé que $t = 0$ lorsque $t' = 0$) le photon se trouve en $\mathcal{O}$ (car on a supposé qu'à cet instant $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$). Le photon se propage en ligne droite *obliquement* jusqu'à atteindre la hauteur h à un instant t .

Ici, j'admets quelque chose : la hauteur h est la même dans les deux référentiels parce que les axes $\mathcal{O}z$ et $\mathcal{O}'z'$ sont perpendiculaires à la vitesse v . Ce résultat n'est pas immédiat mais sa preuve nous détournerait du but recherché, à savoir faire apparaître v^2 .

Poursuivons ...

Comme la vitesse de la lumière est la même dans tous les référentiels galiléens, la vitesse du photon dans le référentiel $\mathcal{R}$ est la vitesse c . Pour atteindre sa destination, le photon a parcouru une certaine distance D pendant le temps t . On a donc

$$D = ct$$

Quelle est la position du photon à l'instant t ? Il se trouve à la hauteur h . De plus, pendant le temps t , le point $\mathcal{O}'$ (et donc aussi le photon, qui est à la verticale de $\mathcal{O}'$) s'est déplacé le long de $\mathcal{O}x$ d'une distance $\delta = vt$.

La figure 3 montre l'expérience dans le référentiel $\mathcal{R}$. Comme tout à l'heure, la trajectoire du photon est indiquée en gras. Le carré noir indique cette fois la position du photon à l'instant final t .

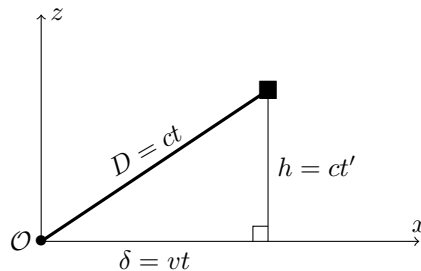


FIGURE 3 – L'expérience dans le référentiel $\mathcal{R}$

Nous avons un triangle rectangle : *quadratum lateris quod recto angulo opponitur, aequale est duobus simul reliquorum laterum quadratis*. Bref, appliquons le

théorème de Pythagore pour obtenir

$$D^2 = \delta^2 + h^2$$

En remplaçant D , δ et h par leur valeurs,

$$(ct)^2 = (vt)^2 + (ct')^2$$

Développons les carrés.

$$c^2t^2 = v^2t^2 + c^2t'^2$$

Et voilà, v^2 apparaît ! Si j'ose, la vitesse est élevée au carré « à cause » de Pythagore. S'il y avait des cubes dans le théorème de Pythagore, eh bien la vitesse serait élevée au cube. Regroupons les termes en t pour obtenir

$$t^2(c^2 - v^2) = c^2t'^2$$

Divisons par c^2 :

$$t^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t'^2$$

Pour finir, passons à la racine carrée.

$$t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = t'$$

En divisant par cette racine carrée, nous obtenons la formule de *dilatation des temps*

$$t = \gamma t' \quad \text{où} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Le facteur γ est le *facteur de Lorentz*. Il ne dépend que de la vitesse v et même, plus exactement, que du carré v^2 de la vitesse. Prenons quelques exemples de valeurs de γ .

- Lorsque $v = 0$, on a $\gamma = 1$ et donc $t = t'$.
- Lorsque $v = 130$ kilomètres/heure,

$$\gamma \simeq 1,00000000000000724$$

Si je roule sur l'autoroute pendant 10 ans, un gendarme placé sur le bord de la route mesurera que j'ai roulé pendant 10 ans et 2 millièmes de seconde.

- Lorsque $v = c/2$,

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \simeq 1,15$$

Lorsqu'un phénomène physique dure 1 seconde dans le référentiel $\mathcal{R}'$, on mesure un temps de 1,15 seconde dans le référentiel $\mathcal{R}$.

- Lorsque $v = 0,99c$, on a $\gamma \simeq 7,09$.
- Lorsque $v = 0,999c$, on a $\gamma \simeq 22,37$. Lorsqu'un phénomène physique dure 1 seconde dans le référentiel $\mathcal{R}'$, on mesure un temps de plus de 22 secondes dans le référentiel $\mathcal{R}$ pour la durée de ce phénomène.

Voici la courbe de γ en fonction de v/c .

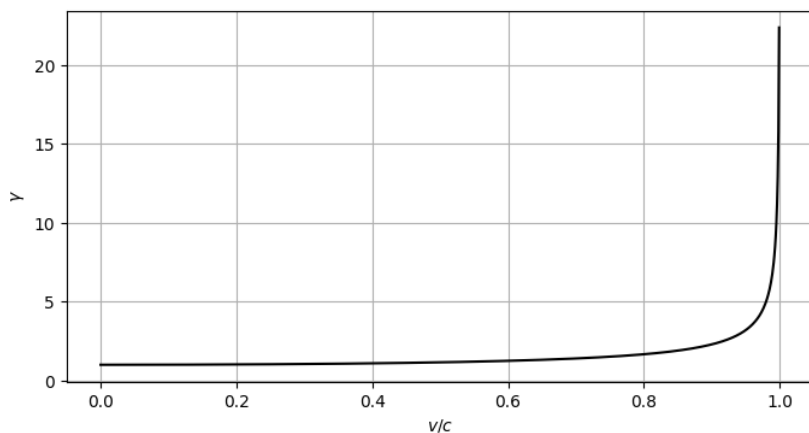


FIGURE 4 – Le facteur de Lorentz

Pourquoi parle-t-on de *dilatation* des temps ? Le temps t' est le temps vécu réellement par le physicien « mobile » $\mathcal{O}'$. C'est ce que l'on appelle son *temps propre*. Ce physicien a faim toutes les $t' = 4$ heures. Il a sommeil toutes les $t' = 24$ heures et meurt au bout de $t' = 100$ ans. Le temps t est quant à lui le temps *mesuré* par le physicien « fixe » $\mathcal{O}$ qui fait des expériences de biologie (ou de physique, ou de chimie, etc.) sur le physicien « mobile ». Lorsque $v = 0,999c$, le physicien « fixe » mesure que le physicien « mobile » mange toutes les $t = 88$ heures, dort toutes les $t = 537$ heures et meurt au bout de $t = 2200$ ans.

Pour terminer, remarquons que le physicien « mobile » $\mathcal{O}'$ est, de son point de vue à lui, « fixe », et que c'est le physicien « fixe » qui est « mobile » et se déplace par rapport à lui à la vitesse $-v$. La formule de dilatation des temps ne fait apparaître que v^2 . Or,

$$(-v)^2 = v^2$$

donc changer v en $-v$ dans les formules ne change rien au résultat. Quand le physicien $\mathcal{O}'$ fait des expériences sur le physicien $\mathcal{O}$, il trouve que $\mathcal{O}$ mange toutes les 88 heures, dort toutes les 537 heures et meurt au bout de 2200 ans. Voilà pourquoi les guillemets autour des mots « fixe » et « mobile ». Tout est relatif.