

De Newton à Kepler

Marc Lorenzi

29 août 2026

Résumé

Tous les bons cours de mécanique montrent que si l'on connaît l'expression de la force d'interaction gravitationnelle, alors on peut démontrer les lois de Kepler. Il est plus rare d'y trouver un examen de la réciproque : connaissant les lois de Kepler, peut-on déterminer l'expression de la force ?

1 Les lois de Kepler

Commençons par énoncer les lois de Kepler.

Proposition 1. [PREMIÈRE LOI DE KEPLER]

Les planètes du système solaire décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Autant le dire tout de suite, la première loi est la plupart du temps énoncée sous cette forme mais elle n'est qu'une approximation. En réalité, le foyer de l'ellipse est le centre d'inertie du système formé par le Soleil et la planète. La différence est la plupart du temps minime, nous en reparlerons.

Proposition 2. [DEUXIÈME LOI DE KEPLER]

Des aires égales sont balayées en des temps égaux.

Proposition 3. [TROISIÈME LOI DE KEPLER]

Si T est la période de révolution de la planète et a est le demi-grand axe de l'ellipse, alors a^3/T^2 ne dépend que des masses du Soleil et de la planète.

Ce que nous allons raconter ne se limite évidemment pas au Soleil et aux planètes. N'importe quel système formé de deux corps soumis à l'interaction gravitationnelle ayant des trajectoires « raisonnables » ferait l'affaire, par exemple une planète et l'un de ses satellites, ou une étoile double, etc.

Corps	Masse	Demi-grand axe
Soleil	1.9884×10^{30} kg	-
Mercure	3.302×10^{23} kg	57.9×10^6 km
Vénus	4.869×10^{24} kg	108.2×10^6 km
Terre	5.974×10^{24} kg	149.6×10^6 km
Lune	7.349×10^{22} kg	3.844×10^5 km
Mars	6.419×10^{23} kg	227.9×10^6 km
Jupiter	1.899×10^{27} kg	778.6×10^6 km
Saturne	5.685×10^{26} kg	1433.5×10^6 km
Uranus	8.683×10^{25} kg	2872.5×10^6 km
Neptune	1.024×10^{26} kg	4495.1×10^6 km

FIGURE 1 – La masse des planètes du système solaire et le demi-grand axe de l’ellipse de leur trajectoire. Pour la Lune, le demi-grand axe est évidemment celui du système Terre-Lune, en négligeant (?) le Soleil.

2 De Newton à Kepler

2.1 Introduction

Notons M la masse du Soleil et m la masse de la planète A . Soit O un point de l’espace. Soient $r = d(O, A)$ et u le vecteur unitaire tel que

$$\overrightarrow{OA} = ru$$

Dans un premier temps, nous allons faire l’hypothèse que le soleil est « immobile » et placé en O . Cette hypothèse est une première approximation : dans le cas du Soleil et de la Terre, le centre d’inertie du système se trouve à 500 km du centre du Soleil. L’hypothèse serait en revanche très osée pour un système tel qu’une étoile double. Nous verrons cependant plus loin qu’une modification mineure permet d’obtenir dans tous les cas, à partir de nos résultats simplistes, le bon résultat.

Le Soleil exerce sur la planète A une force d’attraction

$$f = -\frac{GMm}{r^2}u$$

où G est la *constante de la gravitation* :

$$G = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Remarque. Notre hypothèse du Soleil « immobile » ne peut être, selon la troisième loi de Newton, qu’une approximation : la Terre exerce sur le Soleil une force d’attraction égale à $-f$ et donc le Soleil subit une accélération. Mais bon, continuons à supposer que le Soleil ne bouge pas et reste irrémédiablement à la position O .

Notons $v = d(ru)/dt$ la vitesse de A et $\gamma = dv/dt$ son accélération. La relation fondamentale de la dynamique nous dit que

$$f = m\gamma$$

Cette relation est une équation différentielle d'ordre 2. En imposant la position et la vitesse de la planète A à un instant initial t_0 , cette équation différentielle possède une unique solution. Il suffit donc *a priori* de résoudre l'équation différentielle pour obtenir la trajectoire de la planète. Il est hélas impossible d'obtenir une expression simple de ru en fonction du temps t . En revanche, on peut obtenir l'expression de r et u en fonction d'un certain angle θ qui dépend de t . Nous allons interpréter (r, θ) comme un couple de coordonnées polaires, dans un repère judicieusement choisi.

2.2 Mouvement plan

La première étape consiste à montrer que le mouvement de la planète est un mouvement plan. Soit

$$\sigma = ru \times mv$$

Le vecteur σ est le *moment cinétique* de la planète par rapport au point O , produit vectoriel de son vecteur position et de sa quantité de mouvement.

Proposition 4. σ ne dépend pas du temps.

Démonstration. On a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt}(ru \times mv) = ru \times m\gamma + v \times mv = ru \times f = 0$$

donc σ est constant. Remarquons que ce résultat ne dépend pas vraiment de la forme exacte de f , mais uniquement du fait que f est une *force centrale*, colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA}$. $\square$

En notant σ_0 la valeur de σ à un instant t_0 , on a à tout instant

$$ru \times mv = \sigma_0$$

Si $\sigma_0 \neq 0$, alors r est orthogonal à σ_0 , le mouvement est un mouvement plan. Si $\sigma_0 = 0$, alors v est colinéaire à r . La planète A se déplace sur une droite passant par O . Si ce cas se produisait dans le monde réel, la durée de vie de la planète serait assez brève. Nous supposons donc dans la suite $\sigma_0 \neq 0$. Soit (O, i, j, k) un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$ tel que k soit colinéaire à σ_0 et de même sens. Le repère (O, i, j) est alors un repère orthonormé du plan contenant la trajectoire. On oriente naturellement ce plan en supposant (O, i, j) direct. Soit θ l'angle orienté entre i et u . Dorénavant, nous noterons

$$u_r = u = \cos \theta i + \sin \theta j$$

Nous noterons aussi u_θ le vecteur unitaire directement orthogonal à u_r :

$$u_\theta = -\sin \theta i + \cos \theta j$$

Notons que $u_r \times u_\theta = k$. On a aussi

$$\frac{du_r}{d\theta} = u_\theta, \quad \frac{du_\theta}{d\theta} = -u_r$$

2.3 La constante des aires

Nous allons dans ce qui suit avoir à évaluer des dérivées par rapport au temps t . Nous ferons l'hypothèse que θ est également un paramètre admissible. Une quantité X qui dépend de t , peut ainsi être également vue comme une fonction de θ . On a alors (abusivement pour un mathématicien, et classiquement pour un physicien)

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dX}{d\theta} \dot{\theta}$$

où $\dot{\theta}$ est la dérivée de θ par rapport à t . Revenons à notre problème. On a

$$\begin{aligned} v &= \frac{d}{dt}(ru_r) \\ &= \frac{dr}{dt}u_r + r\frac{du_r}{dt} \\ &= \dot{\theta}\frac{dr}{d\theta}u_r + r\dot{\theta}u_\theta \end{aligned}$$

On en déduit la valeur du moment cinétique :

$$\sigma = ru_r \times mv = mr^2\dot{\theta}k$$

Rappelons que σ ne dépend pas du temps. Le réel $r^2\dot{\theta}$ est donc indépendant du temps. Nous le noterons C . Le réel C est la *constante des aires*. La constante C s'exprime en m^2s^{-1} , c'est à dire comme une aire divisée par un temps. Nous sentons venir la deuxième loi de Kepler.

Preuve de la deuxième loi de Kepler. Calculons l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ entre les instants t_1 et t_2 . Soit θ_i la valeur de θ à l'instant t_i , $i = 1, 2$. L'aire qui nous intéresse est

$$\mathcal{A} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}r^2 d\theta$$

En faisant le changement de variable $\theta = \theta(t)$, il vient

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} dt = \frac{1}{2}C(t_2 - t_1)$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA}$ balaie donc des aires égales dans des intervalles de temps égaux. On comprend également pourquoi C est appelée la constante des aires.

2.4 Les formules de Binet

La « bonne » variable n'est pas le temps t mais l'angle θ . Il s'avère que la « bonne » quantité à chercher n'est pas r mais son inverse.

Proposition 5. [FORMULES DE BINET]

Soit $w = 1/r$. On a

$$\begin{aligned} v &= -C \frac{dw}{d\theta} u_r + C w u_\theta \\ \gamma &= -C^2 w^2 \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r \end{aligned}$$

Démonstration. On a

$$\frac{dw}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

De là, comme $v = r u_r$,

$$\begin{aligned} v &= \frac{dr}{dt} u_r + r \frac{du_r}{dt} \\ &= \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta} u_r + r \dot{\theta} u_\theta \\ &= -r^2 \dot{\theta} \frac{dw}{d\theta} u_r + w r^2 \dot{\theta} u_\theta \\ &= -C \frac{dw}{d\theta} u_r + w C u_\theta \end{aligned}$$

Redérivons pour obtenir

$$\begin{aligned} \gamma &= -C \frac{d^2 w}{d\theta^2} \dot{\theta} u_r - C \frac{dw}{d\theta} \dot{\theta} u_\theta + \frac{dw}{d\theta} \dot{\theta} C u_\theta - w C \dot{\theta} u_r \\ &= -C \dot{\theta} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r \\ &= -C^2 w^2 \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r \end{aligned}$$

□

Remarque. Les formules de Binet sont valables dès que le corps A est soumis à une force centrale, quelle que soit cette force.

2.5 Preuve de la première loi de Kepler

Le principe fondamental de la dynamique nous dit que $m\gamma = f$. En utilisant la deuxième formule de Binet, on a donc

$$-m C^2 w^2 \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r = -\frac{GMm}{r^2} u_r$$

d'où (remarquons que m disparaît)

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{GM}{C^2}$$

Nous avons là une équation différentielle linéaire d'ordre 2. Une solution évidente de celle-ci est la fonction constante GM/C^2 . On a donc

$$w = \frac{GM}{C^2}(1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

où θ_0 est l'angle à l'instant initial t_0 et e ne dépend que des conditions initiales. Ainsi,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

où

$$p = \frac{C^2}{GM}$$

Le point A décrit donc une conique de foyer O , de paramètre p et d'excentricité e . Il s'avère que pour une planète, $e < 1$ et donc cette conique est une ellipse. Nous avons démontré la première loi de Kepler.

2.6 Preuve de la troisième loi de Kepler

Rappelons les résultats que nous avons obtenus lorsque nous avons montré la deuxième loi de Kepler : l'aire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OA}$ entre deux instants t_1 et t_2 est

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}C(t_2 - t_1)$$

Appelons T la période de révolution de la planète. Soient a et b le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse du mouvement. L'aire de l'ellipse est alors πab . Prenons $t_2 = t_1 + T$ pour obtenir

$$\pi ab = \frac{1}{2}CT$$

Exhibons maintenant notre science des ellipses. On a

$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

et donc

$$\frac{1}{2}CT = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$$

Le paramètre de l'ellipse est

$$p = \frac{C^2}{GM} = a(1 - e^2)$$

et donc

$$\sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{p}{a}} = \sqrt{\frac{C^2}{GMa}} = \frac{C}{\sqrt{GMa}}$$

De là,

$$\frac{1}{2}CT = \pi a^2 \frac{C}{\sqrt{GMa}} = \frac{\pi C}{\sqrt{GM}} a^{3/2}$$

d'où

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}$$

et donc

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Nous avons ainsi montré la troisième loi de Kepler, en tout cas sous l'hypothèse que le Soleil est « immobile ». Nous allons dans la prochaine section nous débarrasser de cette hypothèse.

3 Le cas général

Notre calcul du rapport T^2/a^3 donne une valeur qui ne dépend pas de la masse m de la planète. En fait, ce n'est pas le cas. Le problème vient de ce que nous avons fait tous les calculs en supposant le Soleil « très gros et immobile ». Comment nos résultats sont-ils modifiés si nous ne faisons pas cette approximation ?

Prenons pour O le centre de gravité du système Terre-Soleil. En supposant ce système isolé, la conservation de la quantité de mouvement nous dit que O se déplace à vitesse constante. Notons $\overrightarrow{OA} = ru$. En appelant S le Soleil, on a $\overrightarrow{OS} = -r'u$, où $r' = d(O, S)$. De plus,

$$M\overrightarrow{OS} + m\overrightarrow{OA} = 0$$

ou encore

$$mr - Mr' = 0$$

Soient f la force exercée par le Soleil sur la Terre et f' la force exercée par la Terre sur le Soleil. Le système Soleil-Terre est isolé, donc $f' = -f$. De plus, en posant $R = r + r'$, on a

$$f = -\frac{GMm}{R^2}u$$

Le principe fondamental de la dynamique donne

$$\begin{aligned} f &= m \frac{d^2}{dt^2}(ru) \\ f' &= -M \frac{d^2}{dt^2}(r'u) \end{aligned}$$

Comme $R = r + r'$, on a ainsi

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ru) = \frac{1}{m}f - \frac{1}{M}f' = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)f$$

Posons

$$\mu = \frac{Mm}{M+m}$$

de sorte que

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}$$

On a alors

$$f = \mu \frac{d^2}{dt^2}(Ru)$$

Introduisons un point matériel fictif B de masse μ tel que $\overrightarrow{OB} = Ru$, soumis à la force f . Tout ce qui précède reste valable pour la trajectoire de B . La seule différence est que le m qui intervient dans la force f ne se simplifie pas, mais est divisé par μ . Ceci revient à remplacer le rapport GM/C^2 par $GMm/\mu c^2$. Le point B décrit ainsi une conique de foyer O et de paramètre

$$p = \frac{C^2 \mu}{GMm} = \frac{C^2}{G(M+m)}$$

Bilan, nous avons $M+m$ là où nous avions auparavant M . Lorsque la conique est une ellipse de demi-grand axe a , la période de révolution de B devient ainsi

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{G(M+m)}} a^{3/2}$$

et donc

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3$$

Quelle est la trajectoire des « vrais » corps S et A ? On a

$$M\overrightarrow{OS} + m\overrightarrow{OA} = 0$$

et donc

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{OA}$$

De là,

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OS} = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \overrightarrow{OA}$$

d'où

$$\overrightarrow{OA} = \frac{M}{M+m} \overrightarrow{OB}$$

De même,

$$\overrightarrow{OS} = -\frac{m}{M+m} \overrightarrow{OB}$$

Ainsi, les trajectoires de A et S se déduisent de celle de B par des homothéties de centre O et de rapports $M/(M+m)$ et $-m/(M+m)$. L'image d'une conique de foyer O par une homothétie de centre O reste une conique de même type et de foyer O . Enfin, la période des trajectoires de S et A est la même que la période de la trajectoire de B (les points O , A , S et B sont alignés).

La première loi de Kepler doit ainsi être légèrement modifiée, elle devient

Proposition 6. *Les planètes du système solaire décrivent des ellipses dont l'un des foyers est le centre d'inertie du système formé par le soleil et la planète.*

Donnons quelques ordres de grandeur. Pour le couple Soleil-Terre, cette modification est mineure : le centre de gravité du système se trouve à environ 500km du centre du Soleil. Pour le

couple Soleil-Jupiter, le centre de gravité du système se trouve à environ 750000km du centre du Soleil. Sachant que le rayon solaire est environ 700000km, le centre de gravité se trouve à l'extérieur du Soleil. Enfin, pour le système Terre-Lune, le centre de gravité se trouve à environ 4700km du centre de la Terre, c'est à dire environ 1700km sous la surface de la Terre.

4 De Kepler à Newton

Intéressons-nous maintenant au problème inverse. Les lois de Kepler permettent-elles d'obtenir la valeur de la force d'interaction gravitationnelle f ? Soit A un corps de masse m soumis à une force f . Supposons les trois lois de Kepler vérifiées.

La première loi de Kepler nous dit entre autres que la trajectoire de A est plane. Notons O le foyer de l'ellipse décrite par A . Reprenons ensuite les notations déjà vues $(r, \theta, u_r, u_\theta)$.

Proposition 7. *Le moment cinétique de A est constant au cours du temps.*

Démonstration. Le moment cinétique du corps A est

$$\sigma = mr^2\dot{\theta}k$$

Par la seconde loi de Kepler, la quantité

$$\mathcal{A}(t_0, t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2 \dot{\theta} dt$$

ne dépend que de $t - t_0$. Soit F une primitive de $r^2\dot{\theta}/2$. Il existe donc une fonction φ telle que pour tous $t_0 \leq t$,

$$F(t) - F(t_0) = \varphi(t - t_0)$$

Notons que $\varphi(0) = 0$. Dérivons par rapport à t pour obtenir pour tous t_0, t ,

$$F'(t) = \varphi'(t - t_0)$$

On en déduit que $\varphi'(t - t_0)$ ne dépend pas de t_0 . La fonction φ' est donc constante. La fonction F' l'est donc aussi, c'est à dire $r^2\dot{\theta}$ est constant. De là, σ est constant. $\square$

Proposition 8. *La force f est une force centrale.*

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$0 = \frac{d\sigma}{dt} = ru_r \times f$$

La force f est ainsi colinéaire à u_r . $\square$

Proposition 9. *Il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$f = -\frac{K}{r^2}u_r$$

Démonstration. La première loi de Kepler nous dit que la trajectoire du point A est une ellipse de foyer O . En notant p le paramètre de l'ellipse et e son excentricité, on a alors

$$\frac{1}{r} = w = \frac{1}{p}(1 + e \cos(\theta - \theta_0))$$

où $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Le moment cinétique σ étant constant, les formules de Binet restent vérifiées. En notant $C = 2\sigma/m$, on a ainsi

$$\gamma = -C^2 w^2 \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r$$

d'où, par le principe fondamental de la dynamique,

$$\begin{aligned} f &= m\gamma \\ &= -mC^2 w^2 \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) u_r \\ &= -\frac{mC^2}{p} w^2 (-e \cos(\theta - \theta_0) + 1 + e \cos(\theta - \theta_0)) u_r \\ &= -\frac{mC^2}{pr^2} u_r \\ &= -\frac{Km}{r^2} u_r \end{aligned}$$

où

$$K = \frac{C^2}{p}$$

□

Maintenant que nous savons que la force f est une force centrale « en $1/r^2$ », nous pouvons reprendre les calculs du début de l'article en remplaçant GM par K . Nous avons

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Cette égalité devient maintenant

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{K}{4\pi^2}$$

La troisième loi de Kepler, sous l'hypothèse d'un soleil « immobile » placé en O , nous dit que K ne dépend que de M . La troisième loi est trop vague pour permettre de prouver que K est *proportionnel* à M . En *admettant* la proportionnalité, il existe une constante universelle G telle que $K = GM$. On a alors

$$f = -\frac{GMm}{r^2} u_r$$

et on retrouve l'expression de la force d'interaction gravitationnelle.