

Le pendule simple

Marc Lorenzi

3 décembre 2025

Résumé

La période d'un pendule simple pour de très petites oscillations est quasiment indépendante de l'amplitude des oscillations. Qu'en est-il pour de grandes oscillations ? Nous allons voir que la période du pendule s'écrit alors au moyen d'une moyenne arithmético-géométrique.

1 Le problème

Une bille ponctuelle M de masse m est attachée à une des extrémités d'une tige rigide. La tige peut pivoter dans le plan autour de son autre extrémité, fixée en O . On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

Nous appelons $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base orthonormée directe du plan telle que $\vec{e}_1$ soit dirigé vers le bas (et, donc, $\vec{e}_2$ soit horizontal et dirigé vers la droite).

On note ℓ la longueur de la tige et θ l'angle orienté entre le vecteur $\vec{e}_1$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Les forces s'exerçant sur la bille sont

- Son poids $\vec{p} = mg\vec{e}_1$ où g est l'intensité de la pesanteur.
- La force $\vec{R}$ exercée par la tige. Le vecteur $\vec{R}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$, et donc orthogonal à la vitesse de la bille. La force $\vec{R}$ n'effectue ainsi aucun travail.

2 L'équation différentielle

À l'instant $t = 0$, la bille est écartée de la verticale d'un angle $\alpha \in]0, \pi[$. À cet instant, la vitesse de la bille est nulle. Puis on lâche la bille. On choisit l'angle θ pour paramétrer l'évolution du système au cours du temps.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique : $\Delta E_c = \Delta W$ où ΔE_c est la variation de l'énergie cinétique de la bille et ΔW est le travail des forces extérieures s'exerçant sur celle-ci. Entre les instants 0 et t , la variation d'énergie cinétique de la bille est

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

En appelant $x(\theta)$ l'abscisse de la bille (le premier vecteur de la base $\mathcal{B}_0$ est $\vec{e}_1$, dirigé vers le bas), le travail du poids entre les instants 0 et t est

$$\Delta W = mgx(\theta) - mgx(\alpha) = mgl \cos \theta - mgl \cos \alpha$$

On a donc

$$\frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 = mgl (\cos \theta - \cos \alpha)$$

ou encore

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos \theta - \cos \alpha)$$

3 La période du pendule

Soit T la période du pendule. Réécrivons l'équation ci-dessus sous la forme

$$\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{2g}{\ell}} dt$$

Lorsque t varie de 0 à $\frac{T}{4}$, θ décroît de α à 0. La décroissance de θ entraîne $\dot{\theta} \leq 0$. On prend donc un signe moins dans l'expression ci-dessus. On a ainsi, en intégrant,

$$-\int_{\theta(0)}^{\theta(\frac{T}{4})} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \int_0^{\frac{T}{4}} \sqrt{\frac{2g}{\ell}} dt$$

c'est à dire

$$\int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}} \frac{T}{4}$$

d'où

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}$$

On utilise l'égalité $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ pour en déduire

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Faisons maintenant le changement de variable

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$$

On a

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \varphi d\varphi$$

et

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \varphi$$

De là,

$$T = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\theta}{2}} = 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

où $k = \sin \frac{\alpha}{2}$. On peut encore arranger cette expression en remarquant que

$$1 - k^2 \sin^2 \varphi = \cos^2 \varphi + (1 - k^2) \sin^2 \varphi$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + (1 - k^2) \sin^2 \varphi}} = J(1, \sqrt{1 - k^2})$$

où, pour tous réels $a, b > 0$,

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

L'intégrale $J(a, b)$ est intéressante, car

$$J(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$$

où $M(a, b)$ est la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b . Finalement,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \frac{1}{M(1, \cos \frac{\alpha}{2})} = \frac{T_0}{M(1, \cos \frac{\alpha}{2})}$$

où on a posé

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

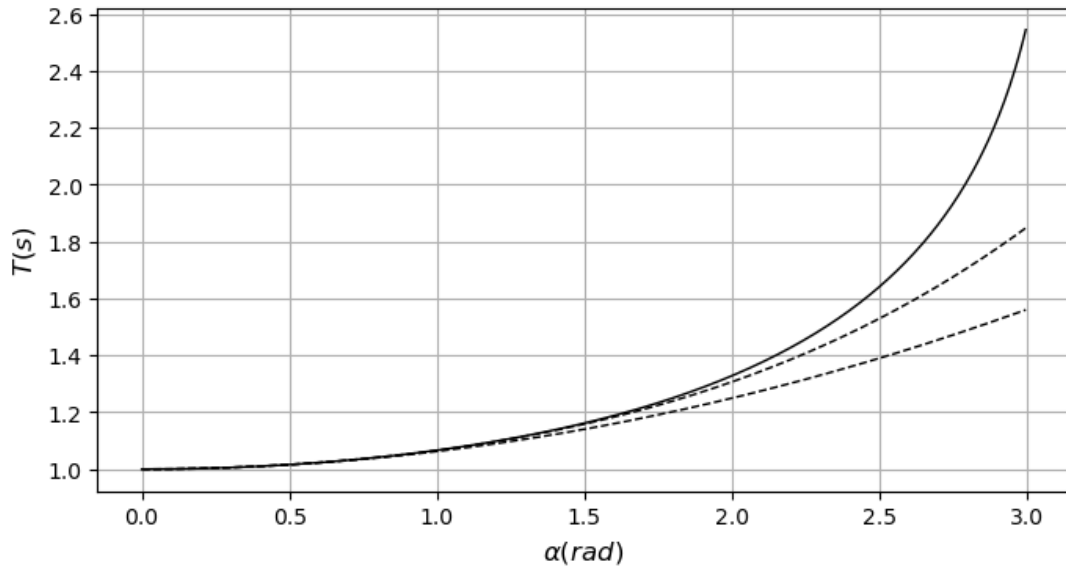


FIGURE 1 – T en fonction de α

Pour tracer la courbe de T en fonction de α , nous avons pris une intensité de la pesanteur $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ et une tige de longueur $\ell = \frac{g}{4\pi^2} \text{ m}$, de sorte que $T_0 = 1 \text{ s}$. Nous parlerons dans la section suivante des deux courbes en pointillés.

4 Approximations de T

4.1 Très petites oscillations

Lorsque α tend vers 0, $M(1, \cos \frac{\alpha}{2})$ tend vers $M(1, 1) = 1$. Ainsi, T vers vers

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

qui est la période bien connue du pendule en « très petites » oscillations. On peut préciser davantage le comportement de T pour des valeurs de α un peu plus grandes en faisant un développement limité.

4.2 Assez petites oscillations

La fonction $x \mapsto M(1, x)$ est dérivable en 1, de dérivée $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned} M(1, x) &= M(1, 1) + (x - 1)M'(1, 1) + o(x - 1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x - 1) + o(x - 1) \end{aligned}$$

De là,

$$\begin{aligned} M\left(1, \cos \frac{\alpha}{2}\right) &= 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) + o\left(\cos \frac{\alpha}{2} - 1\right) \\ &= 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{4} + o\left(\sin^2 \frac{\alpha}{4}\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^2) \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{M\left(1, \cos \frac{\alpha}{2}\right)} = 1 + \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^2)$$

Finalement,

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^2)\right)$$

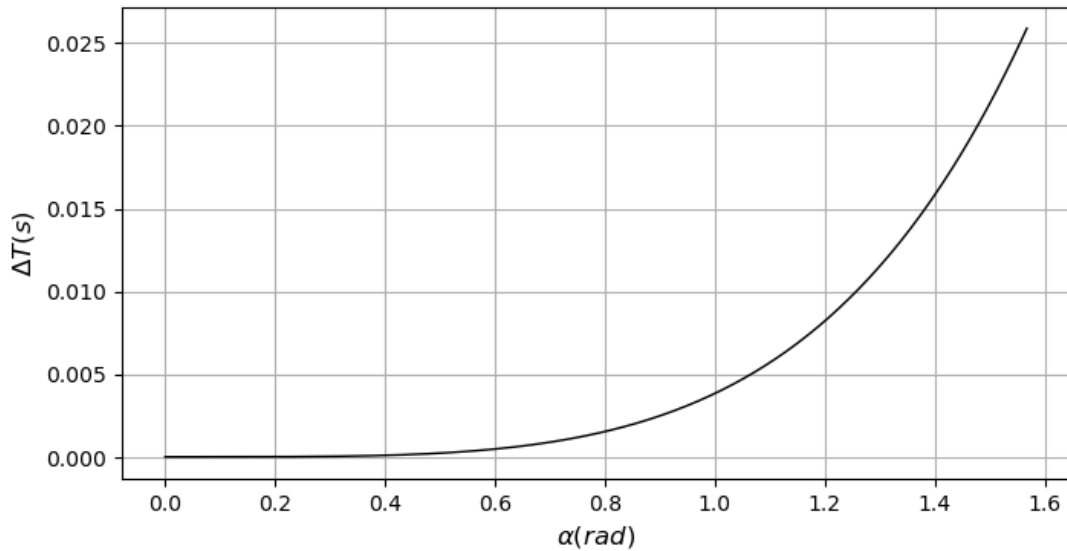


FIGURE 2 – L’erreur commise - approximation des assez petites oscillations

La figure ci-dessus montre l’erreur commise en approchant T par $T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$ en fonction de α , pour $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. On a choisi les mêmes valeurs de ℓ et de g que dans le graphique précédent, de sorte que $T_0 = 1$ s. On constate que pour $\alpha \leq 1$ rad, l’erreur commise est inférieure à 5%.

4.3 Un peu moins petites oscillations

Un développement limité plus poussé fournit

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} + \frac{11\alpha^4}{3072} + o(\alpha^4) \right)$$

Nous épargnerons au lecteur les détails du calcul. Le graphe de l'erreur commise est alors le suivant. Pour $\alpha \leq 1$ rad, l'erreur commise est maintenant inférieure à 5‰.

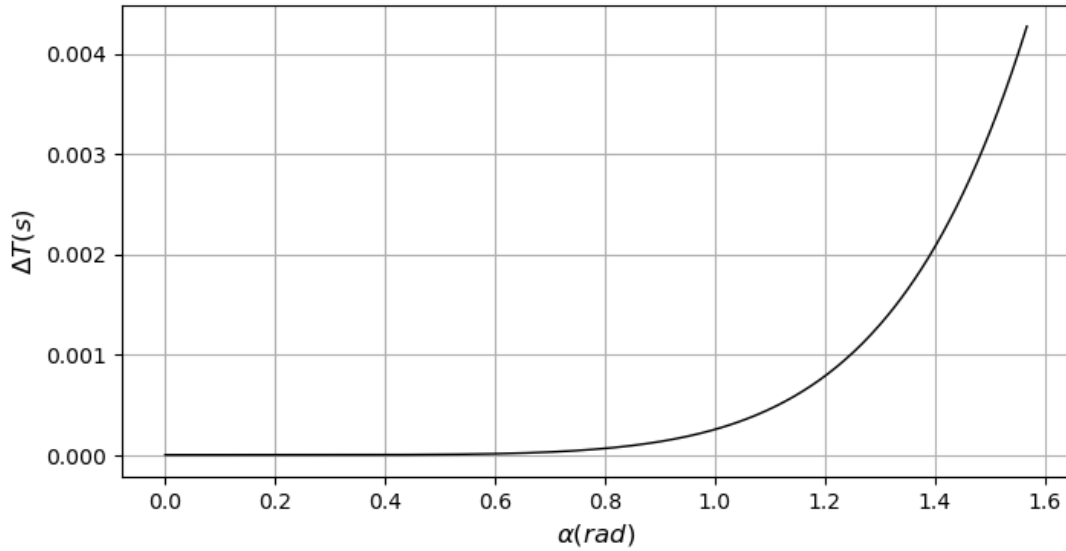


FIGURE 3 – L'erreur commise - approximation des un peu moins petites oscillations

Remarque. Ces approximations de T étaient tout à fait intéressantes à une époque où les calculs numériques se faisaient « à la main ». Notre expression exacte de T à l'aide d'une moyenne arithmético-géométrique permet avec un ordinateur d'obtenir T extrêmement rapidement avec toute la précision que l'on désire.

4.4 Très grandes oscillations

Que se passe-t-il lorsque α tend vers π ? La quantité $\cos \frac{\alpha}{2}$ tend vers 0 et $M(1, \cos \frac{\alpha}{2})$ tend vers 0. Ainsi, T tend vers $+\infty$. Le cas limite $\alpha = \pi$ correspond à un équilibre instable du pendule, où la position initiale de la tige est verticale, avec la bille située au-dessus de O .

On peut montrer que lorsque x tend vers $+\infty$,

$$M(1, x) \sim \frac{\pi}{2} \frac{x}{\ln x}$$

De là, lorsque x tend vers 0,

$$M(1, x) = x M\left(1, \frac{1}{x}\right) \sim \frac{\pi x}{2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln \frac{1}{x}} = -\frac{\pi}{2 \ln x}$$

Posons $\beta = \pi - \alpha$, de sorte que lorsque α tend vers π , β tend vers 0. On a

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \sin \frac{\beta}{2} \sim \frac{\beta}{2}$$

et donc

$$\ln \cos \frac{\alpha}{2} \sim \ln \frac{\beta}{2} \sim \ln \beta = \ln(\pi - \alpha)$$

Ainsi, puisque $T = T_0 / M(1, \cos \frac{\alpha}{2})$,

$$T \sim -\frac{2T_0}{\pi} \ln(\pi - \alpha) = \tilde{T}$$

Voici le graphe de $T / \tilde{T}$ en fonction de α pour des valeurs de α proches de π . Le quotient tend vers 1 lorsque α tend vers π .

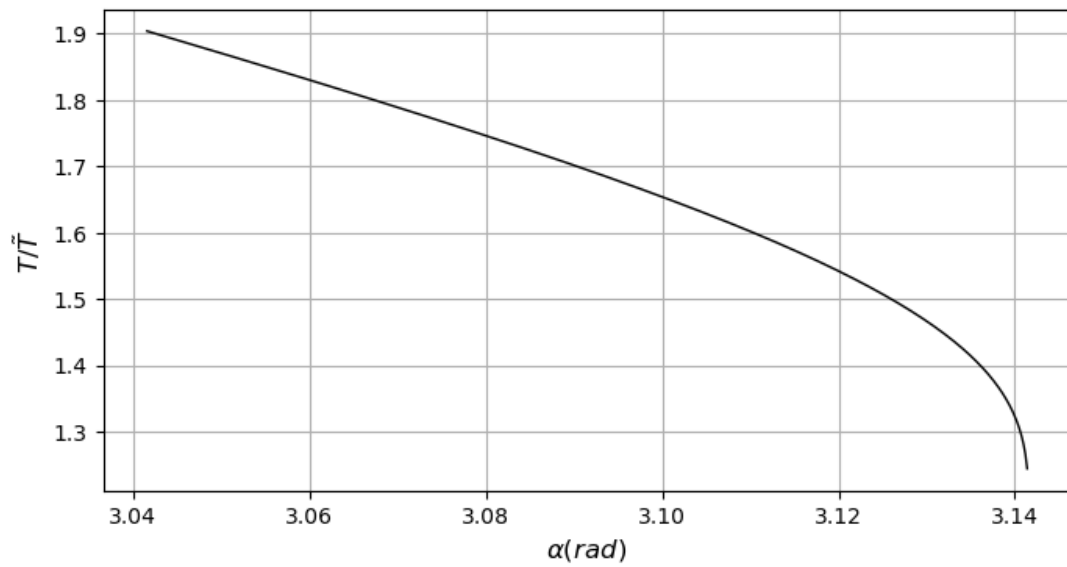


FIGURE 4 – L'erreur commise - approximation des très grandes oscillations