

Points de Lagrange

Marc Lorenzi

20 juillet 2026

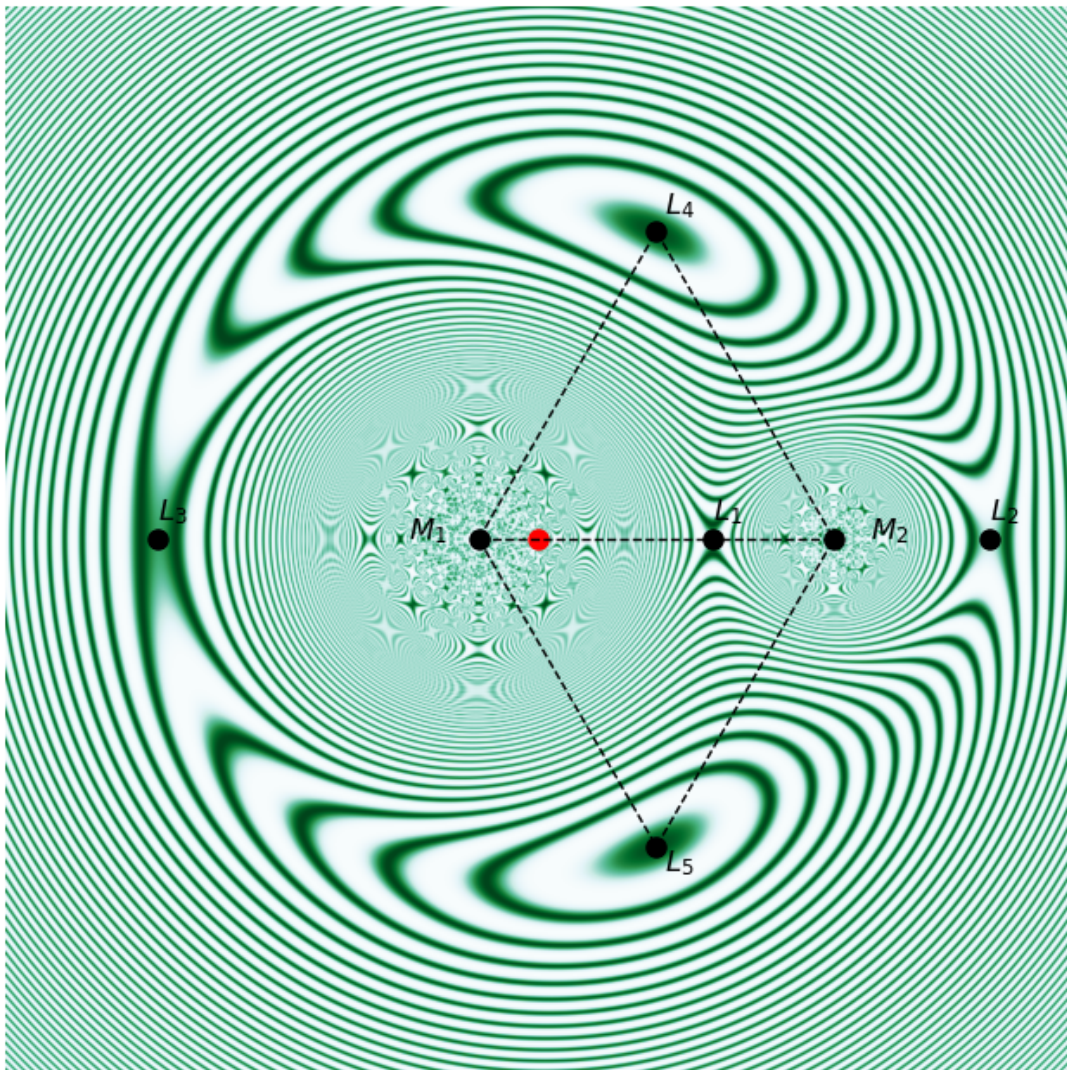


FIGURE 1 – Les points de Lagrange

Remarque sur les notations. Dans ce qui suit, je ne mettrai pas de flèches sur les vecteurs, sauf obligation (par exemple, $\overrightarrow{AB}$ si A et B sont deux points). La norme d'un vecteur u sera notée $\|u\|$. Le produit vectoriel de deux vecteurs u et v sera noté $u \wedge v$. Enfin, leur produit scalaire sera noté $\langle u, v \rangle$.

1 Le calcul des points de Lagrange

1.1 Le problème

Sur la figure de la page précédente, les lettres M_1 et M_2 représentent deux corps (par exemple le Soleil et la Terre) en interaction gravitationnelle. Pour simplifier, on suppose que ces deux corps décrivent à vitesse angulaire constante des cercles dont le centre est le centre de gravité du système (en rouge sur la figure). Existe-t-il des points de l'espace où un corps M serait en équilibre par rapport à M_1 et M_2 ? Nous avons là un problème à trois corps. Sans approximations, il est connu que ce genre de problème est la plupart du temps impossible à résoudre de façon explicite. Nous allons faire l'hypothèse supplémentaire que la masse du corps M est négligeable devant celles de M_1 et M_2 (pour reprendre l'exemple Soleil-Terre, M est un satellite artificiel ou un astéroïde, et pas la planète Jupiter).

Nous allons montrer qu'il existe 5 points vérifiant cette condition d'équilibre : les *points de Lagrange*. Ces points sont étiquetés L_1 à L_5 sur la figure. Trois d'entre eux sont alignés avec M_1 et M_2 : ce sont les points L_1 , L_2 et L_3 . Les points L_4 et L_5 , comme nous le verrons plus loin, sont les sommets de deux triangles équilatéraux, représentés ici en pointillés.

Les courbes qui apparaissent sur la figure sont des *équipotentielles*. Nous en reparlerons à la fin de l'article.

1.2 L'équation

On se donne deux corps M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 . Notons G le centre de masse du système $\{M_1, M_2\}$. On note $r_1 = \overrightarrow{GM_1}$ et $r_2 = \overrightarrow{GM_2}$, de sorte que

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 = 0$$

Un corps M de masse m petite devant m_1 et m_2 , à la position $r = \overrightarrow{GM}$, est soumis à la force gravitationnelle

$$F = -\frac{\mathcal{G} m m_1}{\|r - r_1\|^3} (r - r_1) - \frac{\mathcal{G} m m_2}{\|r - r_2\|^3} (r - r_2)$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de la gravitation. On s'intéresse aux solutions du problème pour lesquelles les positions relatives des trois corps restent fixes au cours du temps.

Le plus simple est de se placer dans un référentiel mobile centré en G , où M_1 et M_2 sont fixes. Le référentiel qui nous intéresse est un référentiel en rotation. Notons Ω son vecteur de rotation instantanée. Par la troisième loi de Kepler,

$$\|\Omega\|^2 D^3 = \mathcal{G}(m_1 + m_2)$$

où $D = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$. Notre nouveau référentiel est non-galiléen. La force qui s'exerce sur le corps M dans ce référentiel est

$$F_\Omega = F - 2m \left(\Omega \wedge \frac{dr}{dt} \right) - m\Omega \wedge (\Omega \wedge r)$$

Le premier terme correcteur est la force de Coriolis. Le second est la force centrifuge. Aux points d'équilibre, $dr/dt = 0$ et $F_\Omega = 0$. Il s'agit donc de résoudre l'équation

$$(E) \quad F - m\Omega \wedge (\Omega \wedge r) = 0$$

La figure ci-dessous représente la norme de F_Ω sous la condition $dr/dt = 0$, c'est à dire la norme du premier membre de l'équation (E). On anticipe un peu en plaçant les points L_1 à L_5 qui sont les futurs points de Lagrange. Les lignes vertes représentent des zones où la norme de F_Ω est (à peu près) constante. Aux points L_i , on a $F_\Omega = 0$.

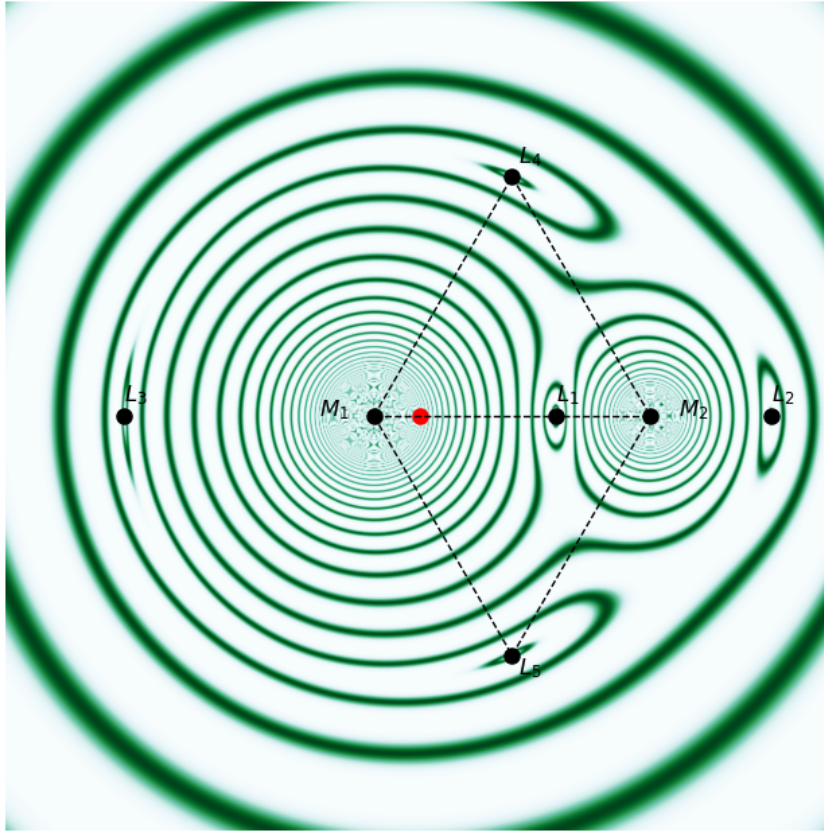


FIGURE 2 – La norme de F_Ω sous la condition de vitesse nulle.

1.3 Simplifications

Donnons-nous une base orthonormée directe (i, j, k) telle que M_1 et M_2 soient sur l'axe des abscisses (M_1 à gauche de M_2) et M soit dans le plan passant par G et engendré par (i, j) . Notons

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{et} \quad \beta = 1 - \alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

On obtient facilement que $r_1 = -\alpha D\imath$ et $r_2 = \beta D\imath$. Notons $r = x\imath + yj$. La troisième loi de Kepler devient

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3}} k$$

De là,

$$\Omega \wedge r = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3}} k \wedge (x\imath + yj) = \sqrt{\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3}} (-y\imath + xj)$$

puis

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge r) = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3} k \wedge (-y\imath + xj) = -\frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3} r$$

L'équation (E) devient

$$(E) \quad -\frac{\mathcal{G}mm_1}{\|r - r_1\|^3}(r - r_1) - \frac{\mathcal{G}mm_2}{\|r - r_2\|^3}(r - r_2) + \frac{\mathcal{G}m(m_1 + m_2)}{D^3}r = 0$$

Le facteur $\mathcal{G}m$ s'élimine. Il reste

$$(E) \quad -\frac{m_1(r - r_1)}{\|r - r_1\|^3} - \frac{m_2(r - r_2)}{\|r - r_2\|^3} + \frac{(m_1 + m_2)r}{D^3} = 0$$

Séparons chacune des coordonnées dans la base $(\imath, j)$. La coordonnée selon $\imath$ est

$$-\frac{m_1(x + \alpha D)}{((x + \alpha D)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2(x - \beta D)}{((x - \beta D)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(m_1 + m_2)x}{D^3} = 0$$

La coordonnée selon j est

$$-\frac{m_1 y}{((x + \alpha D)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2 y}{((x - \beta D)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{(m_1 + m_2)y}{D^3} = 0$$

Factorisons $(m_1 + m_2)/D^3$ dans les égalités pour obtenir finalement les deux équations

$$(1) \quad -\frac{\beta D^3(x + \alpha D)}{((x + \alpha D)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha D^3(x - \beta D)}{((x - \beta D)^2 + y^2)^{3/2}} + x = 0$$

$$(2) \quad -\frac{\beta D^3 y}{((x + \alpha D)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\alpha D^3 y}{((x - \beta D)^2 + y^2)^{3/2}} + y = 0$$

Il ne reste « plus qu'à » résoudre.

2 Les points L_4 et L_5

Commençons par étudier le cas $y \neq 0$. L'équation (2) devient

$$U + V = \frac{\beta D^3}{((x + \alpha D)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{\alpha D^3}{((x - \beta D)^2 + y^2)^{3/2}} = 1$$

Reportons $U = 1 - V$ dans (1) pour obtenir

$$-(1 - V)(x + \alpha D) - V(x - \beta D) + x = 0$$

Les x s'éliminent et il reste (rappelons que $\alpha + \beta = 1$)

$$V = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \alpha$$

puis

$$U = 1 - V = \beta$$

On en déduit, en reprenant la valeur de U et V ,

$$(x + \alpha D)^2 + y^2 = D^2$$

$$(x - \beta D)^2 + y^2 = D^2$$

c'est à dire

$$\|\overrightarrow{M_1 M}\| = \|\overrightarrow{M_2 M}\| = D = \|\overrightarrow{M_1 M_2}\|$$

Il y a ainsi deux points M solutions de notre problème tels que $y \neq 0$. Ce sont les points tels que le triangle (M_1, M_2, M) soit équilatéral. Ces deux points sont notés classiquement L_4 et L_5 . Ils ont été découverts par Joseph-Louis Lagrange vers 1770.

3 Les points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3

Les trois points restant à trouver sont assez mal nommés, puisqu'ils ont été découverts par Léonhard Euler aux alentours de 1750.

3.1 Un changement de variable

Supposons dorénavant $y = 0$. L'équation (2) devient $0 = 0$, sans intérêt. Il nous reste donc uniquement l'équation (1) qui devient, comme $y = 0$,

$$-\frac{\beta D^3(x + \alpha D)}{|x + \alpha D|^3} - \frac{\alpha D^3(x - \beta D)}{|x - \beta D|^3} + x = 0$$

Pour nous débarrasser le plus possible des constantes, posons $x = D(t + \beta)$, où $t \neq -1, 0$ (on se trouverait sinon en M_1 ou en M_2 et on aurait bobo parce qu'on serait soumis à une force infinie). On a alors $x + \alpha D = D(t + 1)$ et $x - \beta D = Dt$. La constante D s'élimine et l'équation devient

$$-\frac{\beta(t + 1)}{|t + 1|^3} - \frac{\alpha t}{|t|^3} + (t + \beta) = 0$$

En notant sgn la fonction « signe », soient $s_0 = \text{sgn}(t)$ et $s_1 = \text{sgn}(t + 1)$. L'équation devient

$$-s_1 \frac{\beta(t + 1)}{(t + 1)^3} - s_0 \frac{\alpha t}{t^3} + (t + \beta) = 0$$

ou encore

$$-s_1 \frac{\beta}{(t + 1)^2} - s_0 \frac{\alpha}{t^2} + (t + \beta) = 0$$

Multiplions par $t^2(t+1)^2$ pour obtenir

$$-\beta s_1 t^2 - \alpha s_0(t+1)^2 + t^2(t+1)^2(t+\beta) = 0$$

En remplaçant β par $1 - \alpha$, l'équation devient finalement

$$(E') \quad f(t) = s_1 t^2 - t^2(t+1)^3 + \alpha(-s_1 t^2 + s_0(t+1)^2 + t^2(t+1)^2) = 0$$

Il y a trois cas à distinguer, selon la position de t par rapport à -1 et 0 . Dans chacun des cas, on a une équation de degré 5. On ne peut pas résoudre explicitement cette équation pour des valeurs de α quelconques. La figure ci-dessous est le graphe de la fonction f . On a pris $m_1 = 5m_2$, c'est à dire $\alpha = 1/6$. On constate (en tout cas pour $\alpha = 1/6$) que f s'annule en trois points, ce qui tombe vraiment bien.

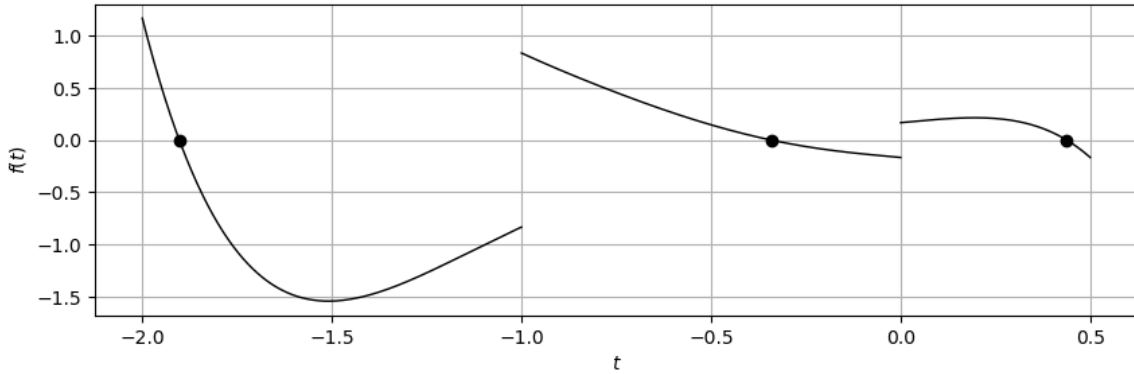


FIGURE 3 – Le graphe de f pour $\alpha = 1/6$

3.2 Comportement asymptotique

Nous allons regarder ce qui se passe lorsque $\alpha \ll 1$, c'est à dire $m_2 \ll m_1$. C'est par exemple le cas lorsque M_1 est le Soleil et M_2 est une planète. C'est encore le cas pour le couple Terre-Lune. Écrivons l'équation sous la forme

$$(E') \quad -s_1 t^2 + t^2(t+1)^3 = \alpha(-s_1 t^2 + s_0(t+1)^2 + t^2(t+1)^2)$$

- Cas 1, $t < -1$ (et donc $s_1 = s_0 = -1$). L'équation (E') devient

$$t^2 + t^2(t+1)^3 = \alpha(t^2 - (t+1)^2 + t^2(t+1)^2)$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient l'unique solution $t = -2$. Posons donc $t = -2 + u$, où u est « petit ». L'équation devient

$$(-2+u)^2 + (-2+u)^2(-1+u)^3 = \alpha((-2+u)^2 - (-1+u)^2 + (-2+u)^2(-1+u)^2)$$

Le membre de gauche est équivalent à $-12u$. Le membre de droite tend vers 7α lorsque u tend vers 0. On a donc

$$u \simeq -\frac{7}{12}\alpha$$

On en déduit

$$x = D(t+\beta) = D(-1+u-\alpha) \simeq -D\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right)$$

- Cas 2, $-1 < t < 0$ (et donc $s_1 = 1, s_0 = -1$). L'équation (E') devient

$$-t^2 + t^2(t+1)^3 = \alpha(-t^2 - (t+1)^2 + t^2(t+1)^2)$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient $t = 0$. On cherche donc un t « petit ». Lorsque t tend vers 0, le membre de gauche est équivalent à $3t^3$. Celui de droite est équivalent à $-\alpha$. On a donc

$$t \simeq -\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}$$

On en déduit

$$x = D(t + \beta) = D(1 + t - \alpha) \simeq D\left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right)$$

- Cas 3, $0 < t$ (et donc $s_1 = s_0 = 1$). L'équation (E') devient

$$-t^2 + t^2(t+1)^3 = \alpha(-t^2 + (t+1)^2 + t^2(t+1)^2)$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient $t = 0$. On cherche donc un t « petit ». Lorsque t tend vers 0, le membre de gauche est équivalent à $3t^3$. Celui de droite est équivalent à α . On a donc

$$t \simeq \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}$$

On en déduit

$$x = D(t + \beta) = D(1 + t - \alpha) \simeq D\left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right)$$

Nous avons donc trouvé trois solutions à l'équation (E') , et donc trois points de Lagrange. Ces points sont notés classiquement L_1 , L_2 et L_3 . Plus exactement, les abscisses de L_1 , L_2 et L_3 sont respectivement

$$\begin{aligned} x(L_1) &\simeq D\left(1 - \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right) \\ x(L_2) &\simeq D\left(1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^{1/3}\right) \\ x(L_3) &\simeq -D\left(1 + \frac{5}{12}\alpha\right) \end{aligned}$$

3.3 Le Soleil et la Terre

Prenons $M_1 = S$ (le Soleil) et $M_2 = T$ (la Terre). On a

$$m_1 = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$m_2 = 5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

$$D = 1.50 \times 10^8 \text{ km}$$

On a pris pour D la distance moyenne entre le Soleil et la Terre. On a

$$\alpha = 3.00 \times 10^{-6}$$

Remarquons que $\alpha D \simeq 451 \text{ km}$. Le centre de gravité du système Soleil-Terre se trouve quasiment au centre du soleil.

La distance de L_4 et L_5 à la Terre (et donc aussi au Soleil) est évidemment égale à D puisque nous avons des triangles équilatéraux. Voici, en kilomètres, les coordonnées des points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 dans le référentiel tournant.

$$\begin{aligned} x(L_1) &\simeq 1.48 \times 10^8 \text{ km} \\ x(L_2) &\simeq 1.51 \times 10^8 \text{ km} \\ x(L_3) &\simeq -1.50 \times 10^8 \text{ km} \end{aligned}$$

Les coordonnées de L_1 et L_2 ne sont pas très parlantes. Il vaut mieux donner la distance de ces points à la Terre. Celle-ci vaut environ $1.50 \times 10^6 \text{ km}$.

3.4 La Terre et la Lune

Prenons $M_1 = T$ (la Terre) et $M_2 = L$ (la Lune). On a

$$\begin{aligned} m_1 &= 5.97 \times 10^{24} \text{ kg} \\ m_2 &= 7.35 \times 10^{22} \text{ kg} \\ D &= 3.84 \times 10^5 \text{ km} \end{aligned}$$

où D est la distance moyenne entre la Terre et la Lune. On a $\alpha = 0.0121$ et $\alpha D \simeq 4662 \text{ km}$. les coordonnées des points de Lagrange L_1 , L_2 et L_3 dans le référentiel tournant sont

$$\begin{aligned} x(L_1) &\simeq 323000 \text{ km} \\ x(L_2) &\simeq 445000 \text{ km} \\ x(L_3) &\simeq -386000 \text{ km} \end{aligned}$$

4 Potentiel

Rappelons que la force qui s'exerce sur le point M dans le référentiel mobile est

$$F_\Omega = F - 2m \left(\Omega \wedge \frac{dr}{dt} \right) - m\Omega \wedge (\Omega \wedge r)$$

où

$$F = -\frac{\mathcal{G}mm_1}{\|r - r_1\|^3}(r - r_1) - \frac{\mathcal{G}mm_2}{\|r - r_2\|^3}(r - r_2)$$

Classiquement, $F = m\nabla U_\Omega$ où

$$U_\Omega = \frac{\mathcal{G}m_1}{\|r - r_1\|} + \frac{\mathcal{G}m_2}{\|r - r_2\|}$$

Considérons maintenant le terme de F_Ω qui provient de la force centrifuge. On a

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge r) = -\|\Omega\|^2 r = -\nabla \left(\frac{1}{2} \|\Omega\|^2 \|r\|^2 \right)$$

Nous avons donc

$$F_\Omega = m \nabla U_P - 2m \left(\Omega \wedge \frac{dr}{dt} \right)$$

où

$$U_P = U_\Omega + \frac{1}{2} \|\Omega\|^2 \|r\|^2$$

Le terme de F_Ω qui provient de la force de Coriolis est orthogonal à dr/dt . Ceci suggère de faire un produit scalaire pour l'éliminer. On obtient

$$\left\langle F_\Omega, \frac{dr}{dt} \right\rangle = \left\langle m \nabla U_P, \frac{dr}{dt} \right\rangle$$

Remarquons maintenant que

$$\left\langle F_\Omega, \frac{dr}{dt} \right\rangle = m \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + m \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left\| \frac{dr}{dt} \right\|^2 \right)$$

Également,

$$\left\langle \nabla U_P, \frac{dr}{dt} \right\rangle = \frac{\partial U_P}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U_P}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{dU_P}{dt}$$

En réunissant le tout, on obtient ainsi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{dr}{dt} \right\|^2 \right) = \frac{dU_P}{dt}$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left\| \frac{dr}{dt} \right\|^2 - U_P \right) = 0$$

Les solutions du problème vérifient ainsi

$$\frac{1}{2} \left\| \frac{dr}{dt} \right\|^2 - U_P = U$$

où U est constant au cours du temps. Nous appellerons *équipotentielles* les courbes pour lesquelles la norme de dr/dt est constante, c'est à dire les courbes d'équation $U_P = \text{constante}$. Pour terminer, écrivons les équipotentielles à l'aide des paramètres α , β et D . On a

$$U_P = \frac{\mathcal{G}m_1}{\|r - r_1\|} + \frac{\mathcal{G}m_2}{\|r - r_2\|} + \frac{1}{2} \|\Omega\|^2 \|r\|^2$$

Rappelons-nous que

$$\|\Omega\|^2 = \frac{\mathcal{G}(m_1 + m_2)}{D^3}$$

En factorisant $\mathcal{G}(m_1 + m_2)$ dans l'expression de U_P , on obtient finalement

$$U_P = \mathcal{G}(m_1 + m_2) \left(\frac{\beta}{\|r - r_1\|} + \frac{\alpha}{\|r - r_2\|} + \frac{1}{2D^3} \|r\|^2 \right)$$

Les quantités $\mathcal{G}$, m_1 et m_2 ne dépendent évidemment pas du temps. Les équipotentiellles sont donc les courbes d'équation

$$\frac{\beta}{\|r - r_1\|} + \frac{\alpha}{\|r - r_2\|} + \frac{\|r\|^2}{2D^3} = c^{\text{te}}$$

La boucle est bouclée : les courbes qui apparaissent sur la figure 1 sont les équipotentiellles. Pour terminer, voici une représentation des équipotentiellles pour différentes valeurs du rapport m_1/m_2 des masses de M_1 et M_2 .

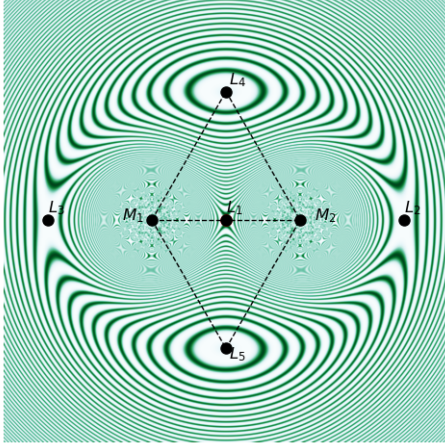


FIGURE 4 – $m_1 = m_2$

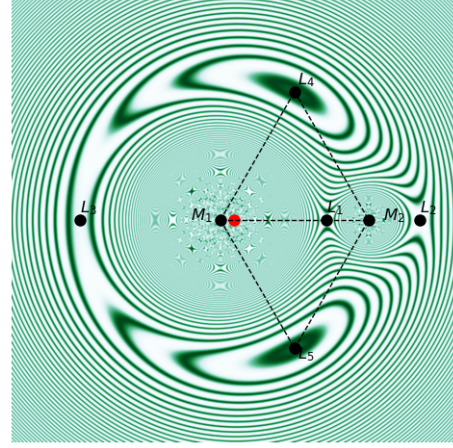


FIGURE 5 – $m_1 = 10m_2$

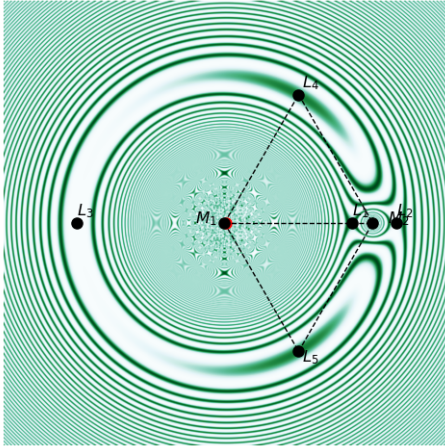


FIGURE 6 – $m_1 = 100m_2$

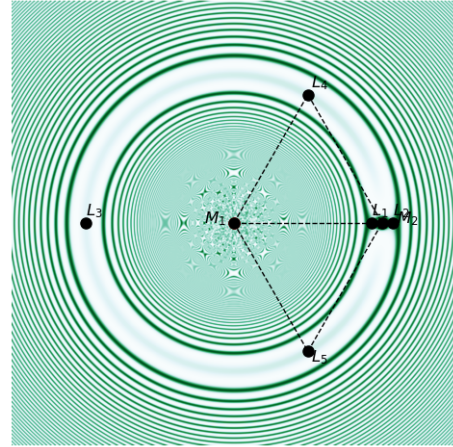


FIGURE 7 – $m_1 = 1000m_2$

Il resterait à parler du problème de la stabilité des points de Lagrange. J'avoue être rebuté par la longueur des calculs. En particulier, la force de Coriolis que nous avons fait élégamment disparaître pour trouver les points de Lagrange intervient de façon cruciale dans l'étude de leur stabilité. On peut montrer que les points L_1 , L_2 et L_3 sont instables. En revanche, si le rapport

m_1/m_2 est assez grand (ce qui est le cas pour le système Soleil-Terre ou Terre-Lune), alors les points L_4 et L_5 sont des points stables.

Les points L_4 et L_5 étant stables, on peut s'attendre à y trouver des astéroïdes en équilibre. Ce type d'astéroïde est appelé un *astéroïde troyen*.

- Pour le système Soleil-Jupiter, ces corps sont connus depuis longtemps. Ils constituent au point L_4 le *camp grec* et au point L_5 le *camp troyen*. On en a catalogué un peu plus de 7000 et on pense qu'il y en a beaucoup plus.
- Pour le système Soleil-Terre, on connaît deux astéroïdes troyens situés au point L_4 . Il s'agit de (706765) 2010 TK_7 , découvert en 2010 (diamètre de 300 m) et de (614689) 2020 XL_5 , découvert en 2020 (diamètre de 1.2 km). On n'a en revanche jamais observé d'astéroïde troyen au point L_5 .

On trouve facilement sur Internet des informations sur les troyens associés à d'autres planètes. Étant mathématicien et pas physicien, je ne m'aventurerai pas plus loin dans les détails. Je me contenterai de faire remarquer que la réalité est bien plus complexe que le cadre que nous nous sommes fixés dans cet article :

- La Terre ne décrit pas un cercle de centre G mais une ellipse de foyer G .
- Nous avons évalué le centre de gravité du système Soleil-Terre à 450 km du centre du Soleil. Cependant, le centre de gravité du système Soleil-Jupiter se situe à 740000 km (!) du centre de Soleil. Il est donc impossible de ne pas tenir compte de la planète Jupiter dans un calcul précis des points de Lagrange du système Soleil-Terre.
- Et caetera.