

Chaînes de Markov et taille de l'univers

Marc Lorenzi

11 avril 2026

Soit $(\Omega, \mathfrak{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On suppose que les singletons appartiennent à $\mathfrak{T}$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur Ω , à valeurs dans un ensemble S . Nous allons montrer que si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont les probabilités de transition vérifient certaines propriétés, alors l'univers Ω est infini, non dénombrable.

On fait les hypothèses suivantes :

1. L'ensemble S est fini.
2. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la *propriété de Markov* : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_0, \dots, x_n \in S$,

$$\mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x, y \in S$, $p_{xy} = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x)$ ne dépend pas de n .
4. Pour tous $x, y \in S$, $p_{xy} \in [0, 1[$.

Par l'hypothèse 1, le réel $q = \max\{p_{xy} : x \in S, y \in S\}$ est bien défini. Par l'hypothèse 4, on a $0 \leq q < 1$.

Proposition 1. Pour tout $a \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$.

Démonstration. Soit $a \in \Omega$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $x_k = X_k(a)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème des probabilités composées et la propriété de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k = x_k | X_{k-1} = x_{k-1}) \\ &= \mathbb{P}(X_0 = x_0) \prod_{k=1}^n p_{x_{k-1}x_k} \\ &\leq q^n \mathbb{P}(X_0 = x_0) \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le pléonasme $\{a\} \subset \{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}$. De là,

$$0 \leq \mathbb{P}(\{a\}) \leq q^n \mathbb{P}(X_0 = x_0)$$

Lorsque n tend vers l'infini, q^n tend vers 0, d'où le résultat. $\square$

Proposition 2. *Ω est infini, non dénombrable.*

Démonstration. Soit $A \subseteq \Omega$. Supposons A fini ou dénombrable. On a

$$A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$$

Cette union est une union disjointe finie ou dénombrable d'éléments de $\mathfrak{T}$. Par la σ -additivité de $\mathbb{P}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(\{a\}) = 0$$

Or, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, donc $A \neq \Omega$. $\square$