

# Les inégalités de Chernoff

Marc Lorenzi

10 mai 2026

Dans tout l'article,  $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$  désigne un espace probabilisé.

## 1 Les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

**Proposition 1.** [INÉGALITÉ DE MARKOV]

Soit  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$  une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie. Pour tout réel  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

**Démonstration.** Soit  $Y = a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$ . On a

$$E(Y) = a\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

Soit  $\omega \in \Omega$ . Si  $X(\omega) < a$  alors  $Y(\omega) = 0 \leq X(\omega)$ . Si  $X(\omega) \geq a$ , alors  $Y(\omega) = a \leq X(\omega)$ . Ainsi,  $Y \leq X$ . Par la croissance de l'espérance,  $E(Y) \leq \mathbb{E}(X)$  d'où le résultat.  $\square$

**Remarque.** Comme  $\{X > a\} \subseteq \{X \geq a\}$ , on a aussi  $\mathbb{P}(X > a) \leq \mathbb{E}(X)/a$ .

**Proposition 2.** [INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV]

Soit  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle de variance finie. Pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$$

**Démonstration.** Soit  $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ . La variable aléatoire  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et d'espérance finie, puisque  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{V}(X)$ . Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(Y \geq a^2) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^2}$$

Il reste à remarquer que

$$\{Y \geq a^2\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq a^2\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\}$$

□

Le coefficient  $a^2$  de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que, d'une certaine façon, celle-ci est « meilleure » que l'inégalité de Markov. Peut-on faire mieux ? Oui : au lieu d'élever au carré, élevons à la puissance 4. Notons

$$\mathbb{M}_4(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^4)$$

**Proposition 3.** [INÉGALITÉ DE JE-NE-SAIS-QUI]

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle possédant un moment d'ordre 4 fini. Pour tout  $a > 0$ ,

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{M}_4(X)}{a^4}$$

**Démonstration.** Soit  $Y = (X - \mathbb{E}(X))^4$ . La variable aléatoire  $Y$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  et d'espérance finie. Par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(Y \geq a^4) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a^4}$$

Il reste à remarquer que

$$\{Y \geq a^4\} = \{(X - \mathbb{E}(X))^4 \geq a^4\} = \{|X - \mathbb{E}(X)| \geq a\}$$

□

En élevant à des puissances encore plus grandes, on obtiendrait des inégalités encore meilleures. L'idée des inégalités de Chernoff est simple : pourquoi ne pas carrément passer à l'exponentielle ?

## 2 La fonction génératrice des moments

### 2.1 La fonction génératrice des moments

Soit  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire réelle. La *fonction génératrice des moments* de  $X$  est la fonction  $M_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Plus précisément,  $M_X(t)$  est défini pour tout  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $e^{tX}$  possède une espérance. On a

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} t^k$$

En admettant qu'il est légitime d'échanger l'espérance et le passage à la limite,

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$$

Soient  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  des variables aléatoires réelles indépendantes. Soit  $X = X_1 + \dots + X_n$ . On a

$$M_X(t) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right)$$

Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires  $e^{tX_i}$  sont indépendantes. De là,

$$M_X(t) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^n M_{X_i}(t)$$

## 2.2 Quelques exemples

**Loi de Bernoulli.** Supposons que  $X \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in [0, 1]$ . Par le théorème de transfert, on a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_X(t) = \mathbb{P}(X = 0)e^{t \times 0} + \mathbb{P}(X = 1)e^{t \times 1} = 1 - p + pe^t$$

**Loi binomiale.** Supposons que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  où  $n \in \mathbb{N}$  et  $p \in [0, 1]$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)e^{kt} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{kt} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (pe^t)^k \\ &= (1-p + pe^t)^n \end{aligned}$$

**Loi géométrique.** Supposons que  $X \sim \mathcal{G}(p)$  où  $p \in ]0, 1[$ . On a

$$M_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)e^{nt} = \sum_{n=1}^{\infty} ((1-p)e^t)^n$$

Cette série est une série géométrique. Elle converge si et seulement si

$$(1-p)e^t < 1$$

c'est à dire  $t < -\ln(1-p)$ . On a alors

$$M_X(t) = \frac{p}{1-p} \left( \frac{1}{1 - (1-p)e^t} - 1 \right) = \frac{p}{1 - (1-p)e^t}$$

**Loi de Poisson.** Supposons que  $X \sim \mathcal{P}(\mu)$  où  $\mu > 0$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_X(t) = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{nt} = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^n}{n!} = e^{\mu(e^t-1)}$$

Prenons également quelques exemples de lois continues.

**Loi uniforme** Supposons que  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$  où  $a < b$ . On a

$$M_X(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx$$

Le cas  $t = 0$  est à regarder à part. On a

$$M_X(0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b dx = 1$$

Pour tout  $t \neq 0$ ,

$$M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$

**Loi exponentielle.** Supposons que  $X \sim \mathcal{E}(a)$  où  $a > 0$ . On a

$$M_X(t) = a \int_0^\infty e^{-ax} e^{tx} dx = a \int_0^\infty e^{(t-a)x} dx$$

L'intégrale ci-dessus est convergente si et seulement si  $t < a$ . On a alors

$$M_X(t) = \frac{a}{t-a} \left[ e^{(t-a)x} \right]_0^\infty = \frac{a}{a-t}$$

**Loi normale.** Supposons que  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$  où  $m \in \mathbb{R}$  et  $\sigma > 0$ . On a pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2 + tx} dx$$

En posant  $x' = x - m$ ,

$$M_X(t) = \frac{e^{mt}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x'^2/2\sigma^2 + tx'} dx'$$

On a

$$\frac{x'^2}{2\sigma^2} - tx' = \frac{1}{2\sigma^2} (x'^2 - 2\sigma^2 tx') = \frac{1}{2\sigma^2} ((x' - t\sigma^2)^2 - t^2\sigma^4) = \frac{1}{2\sigma^2} (x' - t\sigma^2)^2 - t^2\sigma^2/2$$

De là, en posant  $x'' = x' - t\sigma^2$ ,

$$M_X(t) = \frac{e^{mt} e^{t^2\sigma^2/2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x''^2/2\sigma^2} dx'' = e^{mt} e^{t^2\sigma^2/2}$$

### 3 Les bornes de Chernoff

#### 3.1 Introduction

Nous allons nous concentrer sur un cas particulier, celui à la variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale. On peut également obtenir des inégalités pour d'autres lois, nous ne le ferons pas ici.

Supposons que  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$  où  $p \in [0, 1]$ . On a alors  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ . Par le théorème de transfert,

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{P}(X_i = 0) + \mathbb{P}(X_i = 1)e^t = 1 + p(e^t - 1) \leq e^{p(e^t - 1)}$$

De là,

$$M_X(t) \leq e^{np(e^t - 1)}$$

### 3.2 Première borne de Chernoff

**Lemme 4.** Pour tout  $x > 0$ ,

$$\ln(1+x) \geq \frac{x}{1+\frac{x}{2}}$$

**Démonstration.** Exercice.  $\square$

**Proposition 5.** Pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq (1+\delta)np) \leq e^{-\frac{2np\delta^2}{2+\delta}}$$

**Démonstration.** Soit  $a = (1+\delta)np$ . Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\{X \geq a\} = \{e^{tX} \geq e^{ta}\}$$

et donc, par l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \mathbb{E}(e^{tX})e^{-ta} \leq e^{np(e^t-1)-ta}$$

Posons

$$\varphi(t) = np(e^t - 1) - ta$$

On a

$$\varphi'(t) = npe^t - a$$

Soit  $t_0 = \ln(a/np)$ . La fonction  $\varphi$  décroît sur  $[0, t_0]$  et croît sur  $[t_0, +\infty[$ . Elle admet donc un minimum en  $t_0$ . On a

$$\varphi(t_0) = np \left( \frac{a}{np} - 1 \right) - a \ln \frac{a}{np}$$

De là,

$$\varphi(t_0) = np(\delta - (1+\delta) \ln(1+\delta))$$

Par le lemme,

$$\varphi(t_0) \leq np \left( (\delta - (1+\delta)) \frac{\delta}{1+\frac{\delta}{2}} \right) = -\frac{2np\delta^2}{2+\delta}$$

En passant à l'exponentielle, on obtient le résultat.  $\square$

### 3.3 Deuxième borne de Chernoff

**Proposition 6.** Pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq (1-\delta)np) \leq e^{-\frac{2np\delta^2}{2-\delta}}$$

**Démonstration.** Prenons  $a = np(1 - \delta)$ . Ceci revient à remplacer  $\delta$  par  $-\delta$  dans ce qui précède.

Pour tout  $t \leq 0$ , posons  $u = -t$  de sorte que  $u \geq 0$ . On a

$$\{X \leq a\} = \{e^{-tX} \geq e^{-ta}\} = \{e^{uX} \geq e^{ua}\}$$

On retrouve une expression analogue à celle que nous avons pour la première borne de Chernoff, d'où le résultat.  $\square$

### 3.4 Regroupons le tout

Remarquons que  $np = \mathbb{E}(X)$ . Soit  $\delta \in \mathbb{R}_+$ .

- Si  $\delta < 1$ , alors

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta np\} = \{X \leq (1 - \delta)np\} \cup \{X \geq (1 + \delta)np\}$$

Les deux événements ci-dessus étant disjoints,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta np) &= \mathbb{P}(X \leq (1 - \delta)np) + \mathbb{P}(X \geq (1 + \delta)np) \\ &\leq e^{-\frac{2np\delta^2}{2-\delta}} + e^{-\frac{2np\delta^2}{2+\delta}} \end{aligned}$$

- Si  $\delta \geq 1$ , alors

$$\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta np\} = \{X \geq (1 + \delta)np\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta np) \leq e^{-\frac{2np\delta^2}{2+\delta}}$$

Comparons avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On a  $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$ . Cette inégalité est donc

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta np) \leq \frac{np(1 - p)}{\delta^2 n^2 p^2} = \frac{(1 - p)}{\delta^2 np}$$

La figure ci-dessous représente, en traits pleins, le majorant pour les bornes de Chernoff, et en pointillés celui pour l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

### 3.5 Le cas $p = 1/2$

Dans le cas où  $p = 1/2$ , seul  $\delta \leq 1$  nous intéresse. On a

$$\mathbb{P}(|X - n/2| \geq \delta n/2) \leq e^{-\frac{n\delta^2}{2-\delta}} + e^{-\frac{n\delta^2}{2+\delta}}$$

Comme  $2 + \delta \leq 3$ ,

$$\mathbb{P}(|X - n/2| \geq \delta n/2) \leq 2e^{-\frac{n\delta^2}{3}}$$

Posons  $\lambda = \delta n/2$ , de sorte que  $\delta = 2\lambda/n$ . L'inégalité devient

$$\mathbb{P}(|X - n/2| \geq \lambda) \leq 2e^{-\frac{4\lambda^2}{3n}}$$

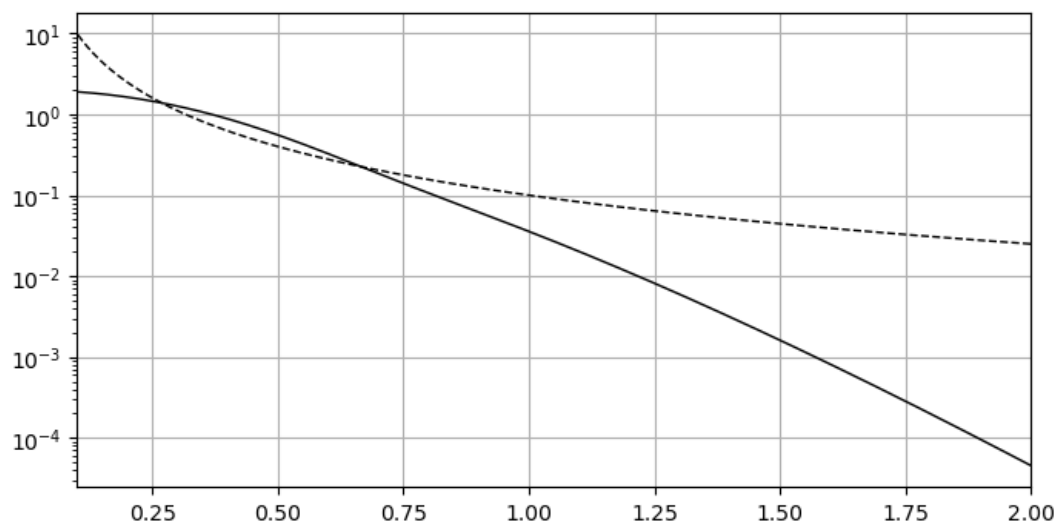


FIGURE 1 – En fonction de  $\delta$ , comparaison entre les bornes de Chernoff et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. En traits pleins, Chernoff. En pointillés, Bienaymé-Tchebychev.