

Autour de l'intégrale de Gauss

Marc Lorenzi

10 juillet 2025

1 Introduction

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Considérons l'intégrale

$$I(a, b, c) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - bt - c} dt$$

Nous allons dans cet article démontrer le résultat suivant.

Théorème 1. *Si $\operatorname{Re}(a) > 0$, l'intégrale $I(a, b, c)$ est absolument convergente. Si $a \neq 0$ et $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b) = 0$, elle est semi-convergente. Sinon, elle diverge. Dans les cas de convergence,*

$$I(a, b, c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

Remarque. Qu'entendons-nous par $\sqrt{a}$? Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Posons $a = re^{i\theta}$ où $r = |a|$ et $\theta = \arg(a) \in]-\pi, \pi]$. Le nombre complexe a possède deux racines carrées opposées, qui sont

$$\pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Nous choisissons

$$\sqrt{a} = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

Remarquons que $\arg(\sqrt{a}) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $\operatorname{Re}(a) \geq 0$, on a même $\arg(\sqrt{a}) \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

Le théorème 1 est très général. Si nous prenons $a = 1$ et $b = c = 0$, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Cette intégrale est souvent appelée l'*intégrale de Gauss*. Si $x \in \mathbb{R}$, $a = 1 + ix/2$ et $b = c = 0$, nous obtenons facilement

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt = \sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

En d'autres termes nous venons de calculer la *transformée de Fourier* de la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$. Pour prendre un dernier exemple, si $a = -i$ et $b = c = 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Il n'est même pas évident que l'intégrale ci-dessus converge. La partie réelle et la partie imaginaire de cette intégrale sont appelées les *intégrales de Fresnel* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos t^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Nous allons démontrer le théorème 1 en plusieurs étapes. Nous commencerons par le calcul de l'intégrale de Gauss, c'est à dire $I(1, 0, 0)$. Nous traiterons ensuite les cas

- a et b réels.
- a réel, b complexe.
- a complexe, $b = 0$.
- a et b complexes.

2 L'intégrale de Gauss

Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

La fonction f est paire, et $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

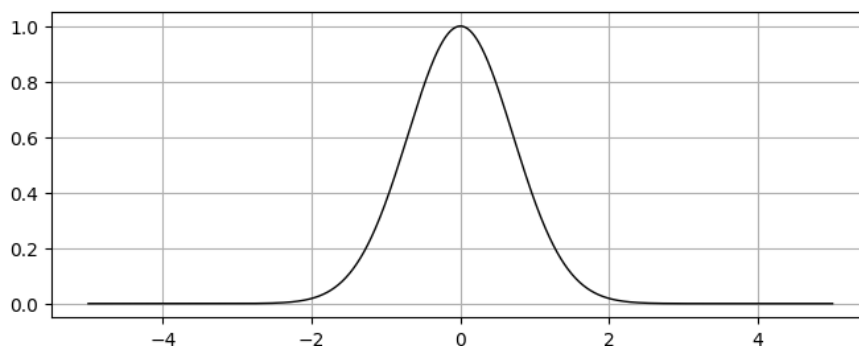


FIGURE 1 – La courbe de Gauss

2.1 Intégrabilité

Notons $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

F est la primitive de f qui s'annule en 0. Comme $f > 0$, F est strictement croissante. Comme f est paire et $F(0) = 0$, F est impaire.

Proposition 2. f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Comme f est positive sur $\mathbb{R}$, il suffit de montrer que F est bornée. Par parité, il suffit de montrer que F est majorée sur $[1, +\infty[$. Pour tout $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt \\ &\leq \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x e^{-t} dt \\ &= \int_0^1 f(t) dt + e - e^{-x} \\ &\leq \int_0^1 e^{-t^2} dt + e \end{aligned}$$

F est donc majorée. $\square$

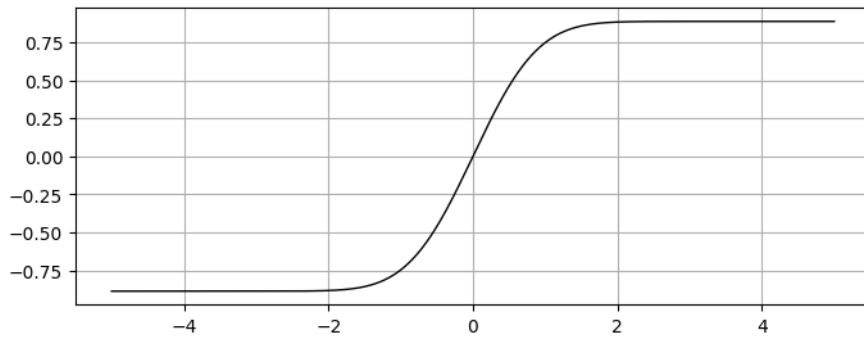


FIGURE 2 – La fonction F

2.2 Le calcul de l'intégrale de Gauss

Proposition 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Démonstration. Par parité, il suffit de calculer l'intégrale de 0 à $+\infty$. Pour tout $R > 0$, soit C_R le carré $[0, R] \times [0, R]$. Soit également

$$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

D_R est un quart de disque, de centre 0 et de rayon R .

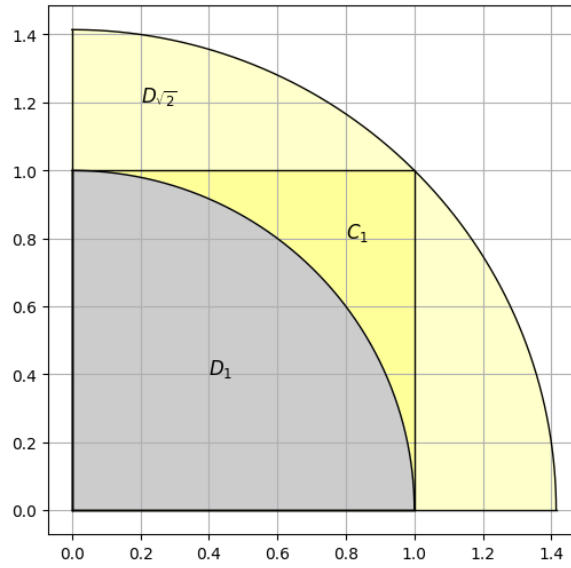


FIGURE 3 – Carré et quarts de disque

Posons

$$I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx$$

Par le théorème de Fubini,

$$I_R^2 = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Remarquons que $D_R \subset C_R \subset D_{R\sqrt{2}}$. On a donc

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_R^2 \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

D_R est l'image par l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ du domaine

$$\Delta_R = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

Rappelons que lors du changement de variables en polaires, $dx dy = r dr d\theta$. On a donc

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{\Delta_R} e^{-r^2} r dr d\theta$$

Par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta_R} e^{-r^2} r dr d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} dr \\ &= -\frac{\pi}{4} [e^{-r^2}]_0^R \\ &= \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \end{aligned}$$

De même,

$$\iint_{D_{R\sqrt{2}}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \iint_{\Delta_{R\sqrt{2}}} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

Nous avons donc pour tout $R > 0$ l'encadrement

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, le minorant et le majorant tendent vers $\frac{\pi}{4}$. Par le théorème d'encadrement, I_R^2 tend vers $\frac{\pi}{4}$, donc I_R , qui est positive, tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. $\square$

2.3 Le théorème 1, première généralisation

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ où $a > 0$. On vérifie facilement que la fonction $x \mapsto e^{-P(x)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

De là,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx = e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} dx$$

Posons $t = \sqrt{a}(x + \frac{b}{2a})$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x+\frac{b}{2a})^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

d'où le résultat. $\square$

3 Transformée de Fourier

La fonction $f : t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, elle possède donc une *transformée de Fourier* qui est la fonction $\mathcal{F}f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt$$

Nous allons calculer $\mathcal{F}f$ par deux méthodes.

3.1 Première preuve - convergence dominée et équation différentielle

Proposition 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Démonstration. Considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x, t) = e^{-t^2} e^{-ixt}$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\varphi(x, t)| = e^{-t^2}$$

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Par le théorème de convergence dominée, $t \mapsto \varphi(x, t)$ l'est aussi et la fonction $g = \mathcal{F}f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = -ite^{-t^2} e^{-ixt}$$

De là,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| = |t|e^{-t^2}$$

La fonction $t \mapsto |t|e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En fait,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt = \left[-e^{-t^2} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Par le théorème de convergence dominée, la fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2} e^{-ixt} dt$$

Intégrons par parties en posant $u' = te^{-t^2}$ et $v = e^{-ixt}$. Il vient

$$\begin{aligned} g'(x) &= -i \left(\left[-\frac{1}{2}t^2 e^{-ixt} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{2}ix \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-ixt} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2}xg(x) \end{aligned}$$

La fonction g est donc solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) \quad y' + \frac{1}{2}xy = 0$$

Une solution évidente de (E) est la fonction g_0 définie par

$$g_0(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $g = cg_0$. Évaluons en 0 pour obtenir

$$g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} = cg_0(0) = c$$

d'où le résultat. $\square$

3.2 Intermède

Notre deuxième preuve va utiliser le *théorème de Cauchy*. Comme nous utiliserons plusieurs fois ce théorème dans la suite, disons en quelques mots.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. La fonction f est *holomorphe* sur Ω lorsque pour tout $z \in \Omega$, f est dérivable en z , c'est à dire que lorsque le nombre complexe h tend vers 0, le quotient

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

a une limite finie. Cette limite est la *dérivée* de f en z et on la note évidemment $f'(z)$. Par exemple, les polynômes, la fonction exponentielle, sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et leurs dérivées sont ce que l'on pense. Les opérations sur les fonctions dérivables bien connues pour les fonctions de variable réelle s'étendent aux fonctions holomorphes. Par exemple, la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f'(z) = -2ze^{-z^2}$$

Un *chemin* est une fonction $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$) de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, où $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$. Le *support* de γ est $\gamma([a, b]) \subset \mathbb{C}$. Le chemin γ est un *lacet* lorsque $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Si le support de γ est inclus dans Ω , l'*intégrale de f le long de γ* est

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

On peut montrer que cette intégrale ne dépend, au signe près, que du support de γ . En *orientant* γ , on fixe également le signe.

Le théorème de Cauchy nous donne la valeur de l'intégrale d'une fonction holomorphe le long d'un lacet.

Proposition 6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soit γ un lacet dont le support est inclus dans Ω . On a alors

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Dans cet article, nous ne considérerons que des lacets très, simples, à savoir

- Des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.
- Des parts de camembert.

3.3 Deuxième preuve - holomorphicité

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, l'égalité est évidente. Supposons donc $x \neq 0$. Soit $R > 0$. Posons

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= [-R, R] \\ \gamma_2 &= [R, R + ix] \\ \gamma_3 &= [R + ix, -R + ix] \\ \gamma_4 &= [-R + ix, -R]\end{aligned}$$

Soit γ la réunion de ces 4 chemins. Pour être tout à fait exacts, γ et les γ_i sont des chemins dont les supports sont donnés ci-dessus.

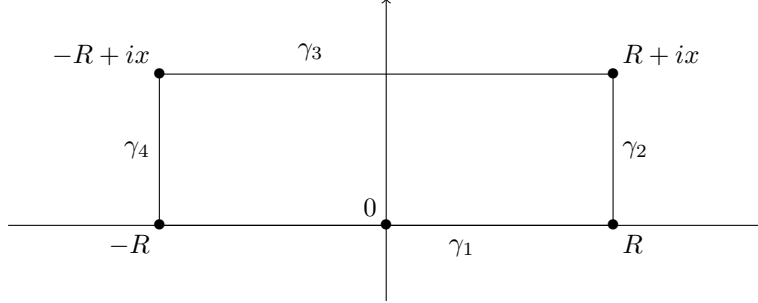


FIGURE 4 – Le lacet γ

Le chemin γ est un lacet. Par le théorème de Cauchy,

$$\int_{\gamma} e^{-z^2} dz = 0$$

On a

$$\int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-t^2} dt$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, cette intégrale tend vers l'intégrale de Gauss, c'est à dire $\sqrt{\pi}$.

Paramétrons γ_2 par $z = R + it$, $t \in [0, x]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz &= i \int_0^x e^{-(R+it)^2} dt \\ &= e^{-R^2} \int_0^x e^{-2iRt} e^{t^2} dt \end{aligned}$$

De là,

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \right| \leq e^{-R^2} \int_0^x e^{t^2} dt$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, le majorant tend vers 0. On a le même résultat pour l'intégrale sur γ_4 . Enfin, paramétrons γ_3 par $z = t + ix$, $t \in [-R, R]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-(t+ix)^2} dt \\ &= e^{x^2} \int_{-R}^R e^{-t^2} e^{-2ixt} dt \end{aligned}$$

Ainsi, en regroupant les morceaux et en passant à la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{-2ixt} dt = \sqrt{\pi} e^{-x^2}$$

On en déduit le résultat en remplaçant x par $x/2$. $\square$

3.4 Le théorème 1, deuxième généralisation

Proposition 7. Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

Démonstration. Posons $b = p + iq$, où $p, q \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} P &= aX^2 + pX + iqX + c = a \left(X + \frac{p}{2a} \right)^2 + iqX + \frac{4ac - p^2}{4a} \\ &= a \left(X + \frac{p}{2a} \right)^2 + iq \left(X + \frac{p}{2a} \right) + \frac{4ac - p^2 - 2ipq}{4a} \end{aligned}$$

Posons

$$d = \frac{4ac - p^2 - 2ipq}{4a}$$

En faisant le changement de variable $t = x + \frac{p}{2a}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx = e^{-d} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} e^{-iqt} dt$$

Posons $u = t\sqrt{a}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx &= \frac{e^{-d}}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} e^{-iqu/\sqrt{a}} du \\ &= \frac{e^{-d}}{\sqrt{a}} \mathcal{F}f\left(\frac{q}{\sqrt{a}}\right) \\ &= e^{-d} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{q^2}{4a}} \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$d + \frac{q^2}{4a} = \frac{4ac - p^2 - 2ipq}{4a} + \frac{q^2}{4a} = \frac{4ac - p^2 - 2ipq + q^2}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Et donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

□

4 Fin de la preuve du théorème 1

Dans ce qui précède, nous avons calculé les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(t)} dt$$

où $p = aX^2 + bX + c$ avec $b, c \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Nous allons maintenant autoriser a à prendre des valeurs non réelles. Commençons par prendre $b = c = 0$.

4.1 Intégrale de Gauss avec un paramètre complexe

Proposition 8. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On suppose que $\operatorname{Re}(a) \geq 0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Démonstration. Posons $a = \rho e^{i\alpha}$ où $\rho > 0$ et $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Soit $R > 0$. Soit $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ où

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= [0, R] \\ \gamma_2 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, \arg z \in [0, \frac{\alpha}{2}]\} \\ \gamma_3 &= \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \arg z = \frac{\alpha}{2}\}\end{aligned}$$

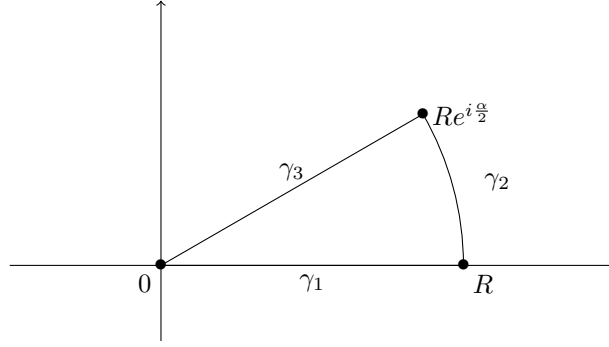


FIGURE 5 – Le lacet γ

On a

$$\int_{\gamma_1} e^{-\rho z^2} dz = \int_0^R e^{-\rho t^2} dt$$

Lorsque R tend vers l'infini, l'intégrale sur γ_1 tend vers

$$\int_0^{+\infty} e^{-\rho t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}$$

Paramétrons γ_3 par $z = te^{i\frac{\alpha}{2}}$, $t \in [0, R]$. On a

$$\int_{\gamma_3} e^{-\rho z^2} dz = e^{i\frac{\alpha}{2}} \int_0^R e^{-\rho t^2 e^{i\alpha}} dt = e^{i\frac{\alpha}{2}} \int_0^R e^{-at^2} dt$$

Paramétrons enfin γ_2 par $z = Re^{it}$, $t \in [0, \frac{\alpha}{2}]$. On a

$$\int_{\gamma_2} e^{-\rho z^2} dz = iR \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\rho R^2 e^{2it}} e^{it} dt$$

Majorons le module de cette intégrale.

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-\rho z^2} dz \right| \leq R \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \left| e^{-\rho R^2 e^{2it}} \right| dt = R \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\rho R^2 \cos 2t} dt$$

La fonction $t \mapsto \cos 2t$ est concave sur $[0, \frac{\pi}{4}]$. Sa courbe est donc au-dessus de la corde dont les extrémités sont les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$. Dit autrement, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$\cos 2t \geq 1 - \frac{4}{\pi}t$$

On a donc

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{-\rho z^2} dz \right| &\leq R \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\rho R^2(1-\frac{4}{\pi}t)} dt \\ &= R e^{-\rho R^2} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} e^{\frac{4\rho R^2}{\pi}t} dt \\ &= \frac{\pi}{4\rho R} e^{-\rho R^2} \left(e^{\frac{2\rho\alpha R^2}{\pi}} - 1 \right) \end{aligned}$$

Comme $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$,

$$e^{\frac{2\rho\alpha R^2}{\pi}} - 1 \leq e^{\rho R^2} - 1 \leq e^{\rho R^2}$$

Ainsi,

$$\left| \int_{\gamma_2} e^{-\rho z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{4\rho R}$$

Lorsque R tend vers l'infini, le majorant tend vers 0 et donc l'intégrale sur γ_2 aussi.

La fonction $z \mapsto e^{-\rho z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On peut donc appliquer le théorème de Cauchy :

$$\int_{\gamma} e^{-\rho z^2} dz = 0$$

ou encore

$$\int_{\gamma_1} e^{-\rho z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-\rho z^2} dz - \int_{\gamma_3} e^{-\rho z^2} dz = 0$$

En rassemblant ce qui précède,

$$e^{i\frac{\alpha}{2}} \int_0^R e^{-at^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}$$

ou encore

$$\int_0^R e^{-at^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\rho} e^{i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt$ est donc convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{-at^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Par parité de la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$, on en déduit le résultat. $\square$

4.2 Le cas des imaginaires purs

Attardons nous un instant sur le cas où a est un imaginaire pur.

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ de partie réelle positive ou nulle. Posons $a = p - iq$ où $p \in \mathbb{R}_+$ et $q \in \mathbb{R}$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$e^{-at^2} = e^{-pt^2} e^{iqt^2}$$

et donc

$$\left| e^{-at^2} \right| = e^{-pt^2}$$

Si $p > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-pt^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ l'est aussi. En revanche, si $p = 0$, c'est à dire si a est imaginaire pur, $\left| e^{-at^2} \right| = 1$. La fonction $t \mapsto e^{-at^2}$ n'est donc pas intégrable sur $\mathbb{R}$. L'intégrale de la proposition 8 est donc semi-convergente.

Creusons un peu. La proposition 8 nous dit que pour tout $q \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqt^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

En prenant partie réelle et partie imaginaire, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(qt^2) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(qt^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2q}}$$

Le cas particulier $q = 1$ donne

$$\int_0^{+\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ces deux intégrales sont les *intégrales de Fresnel*. Elles sont les limites en $+\infty$ des deux fonctions $C, S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \cos t^2 dt \\ S(x) &= \int_0^x \sin t^2 dt \end{aligned}$$

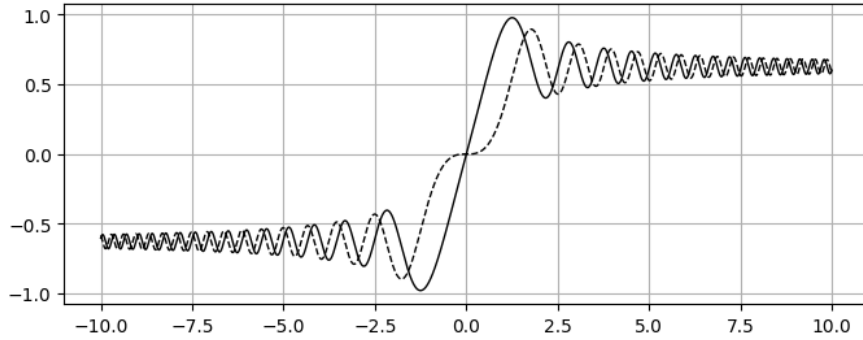


FIGURE 6 – Les fonctions C et S

La courbe paramétrée $x \mapsto (C(x), S(x))$ est la *clothoïde*, ou *spirale de Cornu*, ou encore *spirale d'Euler*. Elle possède de nombreuses propriétés remarquables. Entre autres choses, à similitude près, la clothoïde est l'unique courbe dont la courbure est proportionnelle à l'abscisse curviligne.

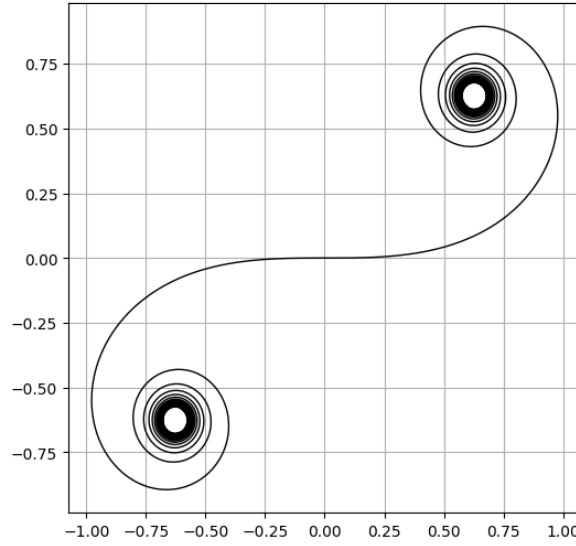


FIGURE 7 – La clothoïde

4.3 Le cas général - convergence

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. On suppose $a \neq 0$. Soit $P = aX^2 + bX + c$. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = e^{-P(z)}$$

À quelle condition sur a et b l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est-elle convergente? Lorsqu'elle converge, quelle est sa valeur? Remarquons que c n'intervient dans l'expression de f par le facteur e^{-c} . Nous pouvons donc sans restreindre la généralité supposer $c = 0$ dans notre discussion. Posons $a = p + iq$, où $p, q \in \mathbb{R}$.

Supposons d'abord $p \neq 0$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| = e^{-pt^2} e^{-\operatorname{Re}(b)t}$$

Si $p > 0$, pour tout t assez grand en valeur absolue,

$$|f(t)| \leq e^{-\frac{1}{2}pt^2}$$

La fonction f est donc intégrable sur $\mathbb{R}$. Si $p < 0$, pour tout t assez grand en valeur absolue,

$$|f(t)| \geq e^{-\frac{1}{2}pt^2}$$

Lorsque t tend vers $\pm\infty$, $|f(t)|$ tend vers $+\infty$. L'intégrale est donc divergente. Il reste à examiner le cas où $p = 0$. Dans ce cas, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = e^{-iqt^2} e^{-bt}$$

Il s'agit cette fois-ci de discuter sur b . Posons $b = \alpha + i\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| = e^{-\alpha t}$$

Si $\alpha < 0$, le module tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Si $\alpha > 0$, le module tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $-\infty$. Dans les deux cas, l'intégrale est divergente. Nous

sommes donc ramenés à l'ultime cas $\alpha = 0$. On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = e^{-i(qt^2 + \beta t)} = e^{-iq(t + \frac{\beta}{2q})^2} e^{\frac{\beta^2}{4q}}$$

Nous avons vu que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqu^2} du$ est convergente. Prenons $q > 0$ pour fixer les idées (si $q < 0$ il suffit de passer au conjugué). En remarquant que

$$\sqrt{iq} = e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{q}$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqu^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

En posant $u = t + \frac{\beta}{2q}$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iq(t + \frac{\beta}{2q})^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

On en déduit que l'intégrale de f converge, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\beta^2}{4q}}$$

Pour conclure, nous avons le résultat suivant.

Proposition 9. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - bt - c} dt$$

converge si et seulement si $\operatorname{Re}(a) > 0$ ou bien $\operatorname{Re}(a) = 0$ et $\operatorname{Re}(b) = 0$.

4.4 Le cas général - valeur de l'intégrale

Commençons par le cas de la semi-convergence.

Proposition 10. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On suppose $\operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}(b) = 0$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - bt - c} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$$

Démonstration. Lorsque $c = 0$, Nous avons déjà calculé l'intégrale dans le paragraphe précédent :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2 - bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{\frac{\beta^2}{4q}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{\beta^2}{4q}}$$

Rappelons-nous que $a = iq$ et $b = i\beta$. On a donc

$$\frac{\beta^2}{4q} = \frac{b^2}{4a}$$

Ainsi, si a et b sont imaginaires purs,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2-bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Lorsque c est quelconque, il suffit de multiplier par e^{-c} pour obtenir le résultat. $\square$

Passons au cas de la convergence absolue.

Proposition 11. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$. On suppose $\operatorname{Re}(a) > 0$. Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2-bt-c} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$$

Démonstration. Ici encore, il suffit de traiter le cas où $c = 0$. Le cas général s'en déduit en multipliant par e^{-c} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$at^2 + bt = a \left(t + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

Posons $\frac{b}{2a} = x + iy$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Si $y = 0$, le changement de variable $u = t + \frac{b}{2a}$ donne le résultat. Nous pouvons donc supposer $y \neq 0$. Remarquons que le changement de variable $u = -t$ montre que $I(a, b, 0) = I(a, -b, 0)$. Quitte à remplacer b par $-b$, nous pouvons donc supposer $y > 0$.

Soit $R > 0$. Considérons le rectangle $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ où

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= [-R, R] \\ \gamma_2 &= [R, R + iy] \\ \gamma_3 &= [-R + iy, R + iy] \\ \gamma_4 &= [-R, -R + iy] \end{aligned}$$

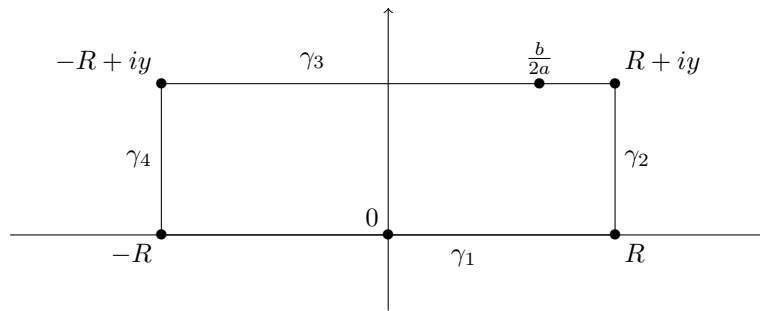


FIGURE 8 – Le lacet γ

On a

$$\int_{\gamma_1} e^{-az^2} dz = \int_{-R}^R e^{-at^2} dt$$

Lorsque R tend vers l'infini, cette intégrale tend vers $\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

Paramétrons γ_3 par $z = x + t + iy = \frac{b}{2a} + t$, $t \in [-R - x, R - x]$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} e^{-az^2} dz &= \int_{-R-x}^{R-x} e^{-a(\frac{b}{2a}+t)^2} dt \\ &= e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-R-x}^{R-x} e^{-at^2-bt} dt \end{aligned}$$

Lorsque R tend vers $+\infty$, l'intégrale sur γ_3 tend vers

$$e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2-bt} dt$$

Paramétrons maintenant γ_2 par $z = R + it$, $t \in [0, y]$. On a

$$\int_{\gamma_2} e^{-az^2} dz = i \int_0^y e^{-a(R+it)^2} dt$$

Posons $a = p + iq$, où $p \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \left| e^{-a(R+it)^2} \right| &= \left| e^{-aR^2} e^{-2iaRt} e^{at^2} \right| \\ &= e^{-pR^2} e^{2qRt} e^{pt^2} \end{aligned}$$

On a donc (rappelons que $y > 0$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} e^{-az^2} dz \right| &\leq e^{-pR^2} \int_0^y e^{2qRt} e^{pt^2} dt \\ &\leq e^{-pR^2} y \max(1, e^{2qRy}) e^{py^2} \end{aligned}$$

Le majorant tend vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour l'intégrale sur γ_2 .

Enfin, le même raisonnement peut être fait pour l'intégrale sur γ_4 : celle-ci tend aussi vers 0 lorsque R tend vers $+\infty$.

Par le théorème de Cauchy,

$$\int_{\gamma} e^{-az^2} dz = 0$$

En regroupant ce qui précède et en faisant tendre R vers $+\infty$, on obtient finalement

$$e^{-\frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2-bt} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

d'où le résultat. $\square$

5 La loi normale

5.1 Introduction

Soit $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. La variable aléatoire X suit la *loi normale* de paramètres m et σ lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Nous noterons $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Le changement de variable $u = t - m$ et notre maîtrise de l'intégrale de Gauss montrent que

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt = 1$$

Nous avons donc bien là une loi de probabilité.

Proposition 12. *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. La variable aléatoire X possède une espérance et une variance, qui sont*

$$\mathbb{E}(X) = m \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Démonstration. Posons

$$Y = \frac{X - m}{\sigma}$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\{Y \leq y\} = \{X \leq m + \sigma y\}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{m+\sigma y} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Posons $t = m + \sigma u$ dans l'intégrale. On obtient

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Ainsi, $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Supposons montré $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = 1$. On a alors le résultat par les propriétés usuelles de l'espérance et de la variance. $\square$

Il nous reste à déterminer espérance et variance de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous allons faire mieux et déterminer tous les moments de cette loi.

5.2 Moments

Nous allons dans ce paragraphe calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$I_n(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-ax^2} dx$$

où $a \in \mathbb{C}^*$ vérifie $\operatorname{Re}(a) > 0$. On vérifie facilement que les intégrales $I_n(a)$ sont absolument convergentes. Lorsque n est impair, l'imparité de la fonction intégrée montre que $I_n(a) = 0$.

Proposition 13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$I_{2n}(a) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Démonstration. Montrons l'égalité par récurrence sur n . Nous savons déjà que

$$I_0(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Soit $n \geq 1$. On a

$$I_{2n}(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx$$

Intégrons par parties en posant

$$u' = xe^{-ax^2} \quad \text{et} \quad v = x^{2n-1}$$

de sorte que

$$u = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \quad \text{et} \quad v' = (2n-1)x^{2n-2}$$

Il vient

$$I_{2n}(a) = -\frac{1}{2a} \left[x^{2n-1} e^{-ax^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2n-1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n-2} e^{-ax^2} dx$$

Le terme intégré est nul. On a donc

$$I_{2n}(a) = \frac{2n-1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n-2} e^{-ax^2} dx = \frac{2n-1}{2a} I_{2n-2}(a)$$

Par l'hypothèse de récurrence,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2a} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-2}(n-1)!a^{n-1}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

d'où, facilement, le résultat. $\square$

5.3 Les moments centrés de la loi normale

Il est maintenant immédiat de calculer les moments centrés en m d'une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Ces moments sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n(X) = \mathbb{E}((X-m)^n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} I_n \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

Si n est impair, $M_n(X) = 0$. En particulier,

$$\mathbb{E}(X-m) = M_1(X) = 0$$

et donc

$$\mathbb{E}(X) = m$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_{2n}(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} 2^n \sigma^{2n} \sqrt{2\pi\sigma^2} = \frac{(2n)!}{2^n n!} \sigma^{2n}$$

En prenant $n = 1$,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-m)^2) = M_2(X) = \sigma^2$$