

L'intégrale de Gauss

Marc Lorenzi

2 avril 2026

1 Une fonction définie par une intégrale

1.1 Introduction

Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Proposition 1.1.1. *La fonction F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La fonction F est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, on a $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = f(x)$. En particulier, F est strictement croissante. $\square$

La fonction F est impaire, dans toute la suite nous nous intéresserons seulement à sa restriction à $\mathbb{R}_+$.

1.2 La limite de F à l'infini

Proposition 1.2.2. *F est majorée.*

Démonstration. Comme F est croissante, il suffit de majorer F sur $[1, +\infty[$. Soit $x \geq 1$. Pour tout $t \in [1, x]$, $t^2 \geq t$ et donc

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = e^{-1} - e^{-x} \leq e^{-1}$$

Pour tout $t \in [0, 1]$,

$$e^{-t^2} \leq 1$$

et donc

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt \leq \int_0^1 dt = 1$$

Ainsi,

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt \leq e^{-1} + 1$$

□

Proposition 1.2.3. *La fonction F a une limite en $+\infty$.*

Démonstration. En effet, F est croissante et majorée. □

Notation. Nous noterons I la limite de F en $+\infty$.

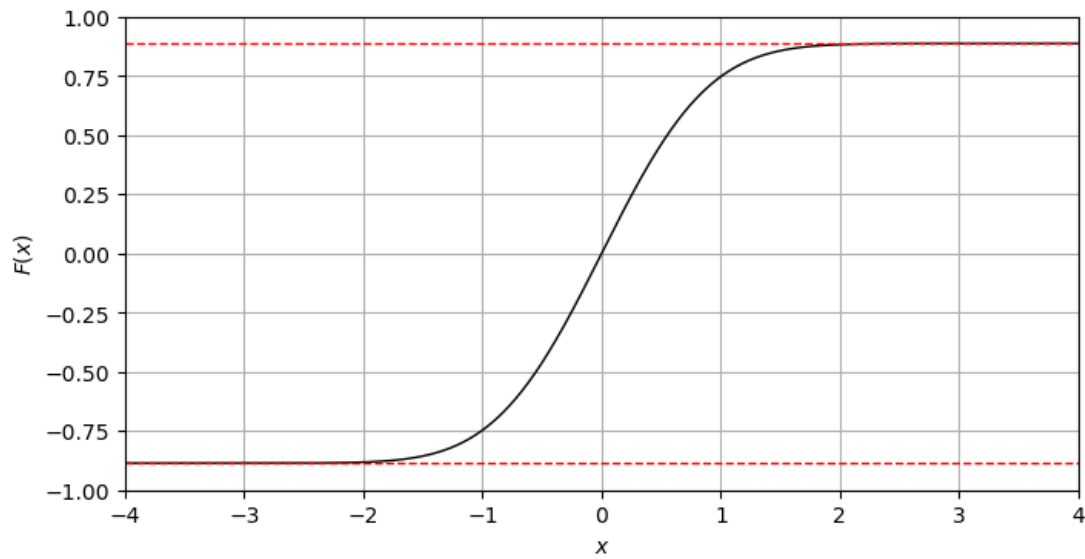


FIGURE 1 – La courbe de F

2 Le calcul de I

2.1 Encadrements

Proposition 2.1.4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leq e^x$.*

Démonstration. La tangente à la courbe de l'exponentielle au point d'abscisse 0 est $y = 1 + x$. Or, l'exponentielle est convexe, donc la courbe est au-dessus de ses tangentes. D'où le résultat. □

Proposition 2.1.5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, \sqrt{n}]$,*

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, \sqrt{n}]$. Par la proposition 4 appliquée à $x = -t^2/n$,

$$1 - \frac{t^2}{n} \leq e^{-t^2/n}$$

Comme $t \in [0, \sqrt{n}]$, les deux membres de l'inégalité sont positifs. L'élevation à la puissance n conserve donc l'inégalité, d'où

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$$

Toujours par la proposition 4, appliquée cette fois à $x = t^2/n$,

$$1 + \frac{t^2}{n} \leq e^{t^2/n}$$

L'élevation à la puissance $-n$ renverse les inégalités et donne

$$e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

□

2.2 Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, d\theta$$

Le changement de variable $\theta' = \pi/2 - \theta$ montre que l'on a aussi

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, d\theta$$

Proposition 2.2.6. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par la proposition 5, on a pour tout $t \in [0, \sqrt{n}]$,

$$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

Par la croissance de l'intégrale,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq F(\sqrt{n}) \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Dans l'intégrale de gauche, posons $t = \sqrt{n} \sin \theta$. On a alors « $dt = \sqrt{n} \cos \theta d\theta$ », d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \theta d\theta \\ &= \sqrt{n} W_{2n+1} \end{aligned}$$

Dans l'intégrale de droite, posons $t = \sqrt{n} \tan \theta$. On a alors « $dt = (1 + \tan^2 \theta) d\theta$ », d'où

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 \theta)^{-n} (1 + \tan^2 \theta) d\theta \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 \theta)^{-n+1} d\theta \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\pi/4} \cos^{2n-2} \theta d\theta \\ &\leq \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} \theta d\theta \\ &= \sqrt{n} W_{2n-2} \end{aligned}$$

□

2.3 Un équivalent de W_n

Nous ne montrerons pas la proposition suivante. La preuve se trouve dans tous les bons cours de MPSI.

Proposition 2.3.7. *Lorsque n tend vers l'infini,*

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

2.4 La valeur de I

Proposition 2.4.8. $I = \sqrt{\pi}/2$.

Démonstration. Par la proposition 7, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De là,

$$\sqrt{n} W_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

De même,

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et donc

$$\sqrt{n}W_{2n-2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Par la proposition 6 et le théorème d'encadrement,

$$F(\sqrt{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\sqrt{n}$ tend aussi vers l'infini. Or, $F(x)$ tend vers I lorsque le réel x tend vers $+\infty$. De là, par le théorème de caractérisation séquentielle des limites, $F(\sqrt{n})$ tend vers I . Par le théorème d'unicité de la limite, $I = \sqrt{\pi}/2$. $\square$

2.5 Complément

La définition précise de l'*intégrale de Gauss* varie selon les sources. Au niveau où se situe cet article, prenons un réel $\alpha > 0$. L'intégrale de Gauss de paramètre α est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt$$

Il faut comprendre par là que cette quantité est la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $\int_{-x}^{+x} e^{-\alpha t^2} dt$.

Proposition 2.5.9. *Pour tout réel $\alpha > 0$, l'intégrale de Gauss de paramètre α existe et*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$. Posons, pour tout $x > 0$,

$$\Phi_\alpha(x) = \int_{-x}^x e^{-\alpha t^2} dt$$

Le changement de variable $t = u/\sqrt{\alpha}$ donne

$$\Phi_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-x\sqrt{\alpha}}^{x\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (F(x\sqrt{\alpha}) - F(-x\sqrt{\alpha}))$$

Par l'impairité de F , $F(-x)$ tend vers $-I$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit que

$$\Phi_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2I}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$\square$