

La loi forte des grands nombres

Marc Lorenzi

8 mai 2026

1 Introduction

Dans tout l'article, $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Dans cette introduction, nous rappelons deux résultats que nous aurons à utiliser pour montrer la loi forte des grands nombres : *l'inégalité de Markov* et le *premier lemme de Borel-Cantelli*.

1.1 L'inégalité de Markov

Proposition 1. [INÉGALITÉ DE MARKOV]

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une variable aléatoire réelle positive d'espérance finie. Pour tout réel $a > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Démonstration. Soit $Y = a\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}$. On a

$$E(Y) = a\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X \geq a\}}) = a\mathbb{P}(X \geq a)$$

Soit $\omega \in \Omega$. Si $X(\omega) < a$ alors $Y(\omega) = 0 \leq X(\omega)$. Si $X(\omega) \geq a$, alors $Y(\omega) = a \leq X(\omega)$. Ainsi, $Y \leq X$. Par la croissance de l'espérance, $E(Y) \leq \mathbb{E}(X)$ d'où le résultat. $\square$

Remarque. Comme $\{X > a\} \subseteq \{X \geq a\}$, on a aussi $\mathbb{P}(X > a) \leq \mathbb{E}(X)/a$.

1.2 Le premier lemme de Borel-Cantelli

Soit $\mathcal{F} = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements. La *limite supérieure* de $\mathcal{F}$ est

$$\limsup \mathcal{F} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

En tant qu'intersection dénombrable d'unions dénombrables d'événements, $\limsup \mathcal{F}$ est encore un événement. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\omega \in \limsup \mathcal{F}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \geq n$ tel que $\omega \in A_m$. Dit autrement, $\omega \in \limsup \mathcal{F}$ si et seulement si ω appartient à une infinité d'événements A_n .

Considérons la série $\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$. Cette série est une série à termes positifs. Il y a donc deux possibilités : cette série converge ou alors ses sommes partielles tendent vers $+\infty$. Dans tous les cas, notons

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Que peut-on dire des événements A_i lorsque la série converge ?

Proposition 2. [PREMIER LEMME DE BOREL-CANTELLI]

On suppose que $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) < +\infty$. Alors, $\mathbb{P}(\limsup \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$\hat{A}_n = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \mathbb{P}(\hat{A}_n) \leq \sum_{m=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_m)$$

Le majorant de l'inégalité est le reste d'une série convergente, il tend donc vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\hat{A}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Remarquons maintenant que la suite $(\hat{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements. On a donc

$$\mathbb{P}(\hat{A}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} \hat{A}_i\right) = \mathbb{P}(\limsup \mathcal{F})$$

d'où, par unicité de la limite, $\mathbb{P}(\limsup \mathcal{F}) = 0$. $\square$

Remarque. Nous n'en aurons pas besoin dans la suite mais il existe évidemment un *second lemme de Borel-Cantelli*. Celui-ci nous dit que si $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = +\infty$ et si la famille $\mathcal{F}$ est indépendante, alors $\mathbb{P}(\limsup \mathcal{F}) = 1$.

2 La loi forte des grands nombres

Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

On se donne une suite $\mathcal{S} = (X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires réelles définies sur Ω . On fait les hypothèses suivantes.

- La suite $\mathcal{S}$ est indépendante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n a la même loi que X .

Notons $Y = X - \mathbb{E}(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n - \mathbb{E}(X)$. On a $\mathbb{E}(Y) = 0$ et les Y_n suivent la même loi que Y .

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad M_n = \frac{1}{n} S_n$$

Soit $A = \{M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}$. De façon plus explicite,

$$A = \{\omega \in \Omega : M_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}$$

Nous allons montrer que A est un événement de probabilité égale à 1.

Proposition 3. $A \in \mathcal{T}$.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, soit

$$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega : \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, |M_n(\omega)| \leq \varepsilon\}$$

On a

$$A_\varepsilon = \bigcup_{N \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{n \geq N} \{\omega \in \Omega : |M_n(\omega)| \leq \varepsilon\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\{\omega \in \Omega : |M_n(\omega)| \leq \varepsilon\} = \{M_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} \in \mathcal{T}$$

De là, A_ε , réunion dénombrable d'intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, est aussi un élément de $\mathcal{T}$.

Soit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0. On a

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\varepsilon_n}$$

et donc A , intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, appartient à $\mathcal{T}$. $\square$

La proposition suivante montre que A est de probabilité 1. La preuve générale est difficile, nous allons faire une hypothèse supplémentaire.

Hypothèse. $\mathbb{E}(X^4) < +\infty$.

Sous cette hypothèse, la variable aléatoire X possède des moments d'ordre inférieur ou égal à 4. Il en est de même pour Y . En particulier, $\mathbb{E}(Y^2) < +\infty$ et $\mathbb{E}(Y^4) < +\infty$.

Proposition 4. $\mathbb{P}(A) = 1$.

Démonstration. Soient $\sigma, \xi \in \mathbb{R}_+^*$ définis par

$$\sigma^2 = \mathbb{E}(Y^2) \quad \text{et} \quad \xi^4 = \mathbb{E}(Y^4)$$

On a

$$\mathbb{E}(S_n^4) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(Y_i Y_j Y_k Y_\ell)$$

Si l'un des indices diffère des trois autres, par exemple i , alors, par le lemme des coalitions, Y_i est indépendante de $Y_j Y_k Y_\ell$ et donc

$$\mathbb{E}(Y_i Y_j Y_k Y_\ell) = \mathbb{E}(Y_i) \mathbb{E}(Y_j Y_k Y_\ell) = 0$$

Il ne reste donc dans la somme que deux types de termes :

- Ceux de la forme Y_i^4 . Il y a n termes de cette sorte, chacun d'entre eux est égal à $\mathbb{E}(Y^4) = \xi^4$.
- Ceux de la forme $Y_i^2 Y_j^2$, où $i \neq j$. Il y en a $3n(n-1)$. En effet, il y a trois possibilités pour regrouper les quatre indices en deux paires, et $n(n-1)$ possibilités pour choisir les indices i et j . Pour ces termes (coalitions, indépendance),

$$\mathbb{E}(Y_i^2 Y_j^2) = \mathbb{E}(Y_i^2) \mathbb{E}(Y_j^2) = \mathbb{E}(Y^2)^2 = \sigma^4$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(S_n^4) = n\xi^4 + 3n(n-1)\sigma^4$$

De là,

$$\mathbb{E}(M_n^4) = \frac{1}{n^4} \mathbb{E}(S_n^4) = \frac{1}{n^3} \xi^4 + \frac{3(n-1)}{n^3} \sigma^4 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En particulier, la série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E}(M_n^4)$ est convergente.

Soit $\varepsilon > 0$. Appliquons l'inégalité de Markov pour obtenir

$$\mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|M_n|^4 > \varepsilon^4) \leq \frac{\mathbb{E}(M_n^4)}{\varepsilon^4}$$

La série $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|M_n| > \varepsilon)$ est donc une série convergente. Par le premier lemme de Borel-Cantelli, en notant $\mathcal{F}_\varepsilon = (\{|M_n| > \varepsilon\})_{n \geq 1}$,

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}) = 0$$

Soit $\omega \in \Omega$. On a $M_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \geq N$ tel que $|M_n(\omega)| > 1/k$. Ou encore, si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\{n \in \mathbb{N}^* : |M_n(\omega)| > 1/k\}$ soit infini, c'est à dire $\omega \in \limsup \mathcal{F}_{1/k}$. Dit autrement,

$$\{M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}^c = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \limsup \mathcal{F}_{1/k}$$

Les événements $\limsup \mathcal{F}_{1/k}$ sont tous de probabilité nulle. Or, une union dénombrable d'événements de probabilité nulle est aussi de probabilité nulle. Ainsi, $\mathbb{P}(\{M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0\}^c) = 0$, d'où $\mathbb{P}(M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0) = 1$. $\square$

Revenons maintenant à la suite $(X_n)_{n \geq 1}$. Pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}(X)) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \right) - \mathbb{E}(X)$$

Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$M_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X)$$

Nous pouvons finalement énoncer la *loi forte des grands nombres*.

Proposition 5. *Soit*

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}(X) \right\}$$

L'ensemble A est un événement et $\mathbb{P}(A) = 1$.