La loi géométrique

Marc Lorenzi

1er mai 2026

1 Introduction

Dans tout l'article, $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé. On se donne $p \in]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.

1.1 La loi géométrique

Définition 1. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire. X suit la *loi géométrique de paramètre* p si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = n) = pq^{n-1}$$

On note alors $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Remarquons que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1} = p \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{p}{1-q} = 1$$

ce qui est heureux pour la loi d'une variable aléatoire.

Remarque. Pour généraliser un peu, on peut supposer que la variable aléatoire X peut prendre une valeur « exceptionnelle » ∞ qui n'est pas dans $\mathbb{N}^*$, mais le calcul ci-dessus montre que $\mathbb{P}(X = \infty) = 0$.

Remarque. Dans la définition de la loi géométrique, on suppose $p \neq 0, 1$. En prenant $p = 1$, on aurait $q = 0$ et donc $\mathbb{P}(X = 1) = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(X = n) = 0$. En prenant $p = 0$, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = 0$. Ceci pose problème. On pourrait éventuellement rajouter une valeur ∞ à l'ensemble des valeurs prises par X et on aurait cette fois $\mathbb{P}(X = \infty) = 1$. En d'autres termes, la variable aléatoire X serait presque sûrement constante, égale à ∞.

1.2 Série génératrice

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\mathbb{P}(X = n+1)}{\mathbb{P}(X = n)} = \frac{pq^n}{pq^{n-1}} = q$$

La série entière $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X = n) z^n$ a donc pour rayon de convergence

$$R = \frac{1}{q} > 1$$

Déterminons la somme $f(z)$ de cette série. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} pq^{n-1}z^n \\ &= pz\sum_{n=1}^{\infty}(qz)^{n-1} \\ &= pz\sum_{n=0}^{\infty}(qz)^{n} \\ &= \frac{pz}{1-qz} \end{aligned}$$

1.3 Espérance et variance

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Proposition 1.

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$

Démonstration. La fonction f est indéfiniment dérivable dans le disque ouvert de centre 0 et de rayon R. Pour tout z appartenant à ce disque,

$$f'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}$$

En particulier, $f'(1) = 1/p$. Or, le théorème de dérivation terme à terme nous dit que

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n)z^{n-1}$$

En particulier,

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X)$$

□

Proposition 2.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}$$

Démonstration. Dérivons une deuxième fois. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à R,

$$f''(z) = \frac{2pq}{(1-qz)^3}$$

En particulier,

$$f''(1) = \frac{2q}{p^2}$$

Par ailleurs, une dérivation terme à terme donne

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)z^{n-2}$$

et donc

$$\begin{aligned} f''(1) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}(X^2) = f''(1) + \mathbb{E}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

puis

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

□

1.4 Entropie

Définition 2. Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire. L'*entropie* de X est

$$\mathbb{H}(X) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X=n) \lg \mathbb{P}(X=n)$$

Proposition 3. *Si $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ est une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors*

$$\mathbb{H}(X) = -\frac{1}{p}(p \lg p + q \lg q)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(X) &= -p\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}(\lg p + (n-1)\lg q) \\ &= -p\lg p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} - p\lg q \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)q^{n-1} \end{aligned}$$

La première somme est

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

La somme somme s'écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} &= \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}(X=n) - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{p}\mathbb{E}(X) - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{q}{p^2}
\end{aligned}$$

De là,

$$\mathbb{H}(X) = -\lg p - \frac{q}{p}\lg q = -\frac{1}{p}(p\lg p + q\lg q)$$

□

Étudions les variations de $\mathbb{H}(X)$. Considérons la fonction $h :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(p) = -\ln p - \frac{1-p}{p}\ln(1-p) = H(X)\ln 2$$

Lorsque p tend vers 1, $1-p$ tend vers 0 donc $(1-p)\ln(1-p)$ tend vers 0. De là, $h(p)$ tend vers 0. Lorsque p tend vers 0, $-\ln p$ tend vers $+\infty$. De plus,

$$\ln(1-p) \sim -p$$

et donc $-(1-p)\ln(1-p)/p$ tend vers 1. De là, $h(p)$ tend vers $+\infty$ lorsque p tend vers 0.

La fonction h est dérivable sur $]0,1[$. Pour tout $p \in]0,1[$,

$$h'(p) = \frac{1}{p^2}\ln(1-p) < 0$$

La fonction h est donc strictement décroissante sur $]0,1[$. Remarquons pour terminer que lorsque p tend vers 1, $h'(p)$ tend vers $-\infty$. Le graphe du prolongement de h à $]0,1]$ a donc une tangente verticale au point $(1,0)$.

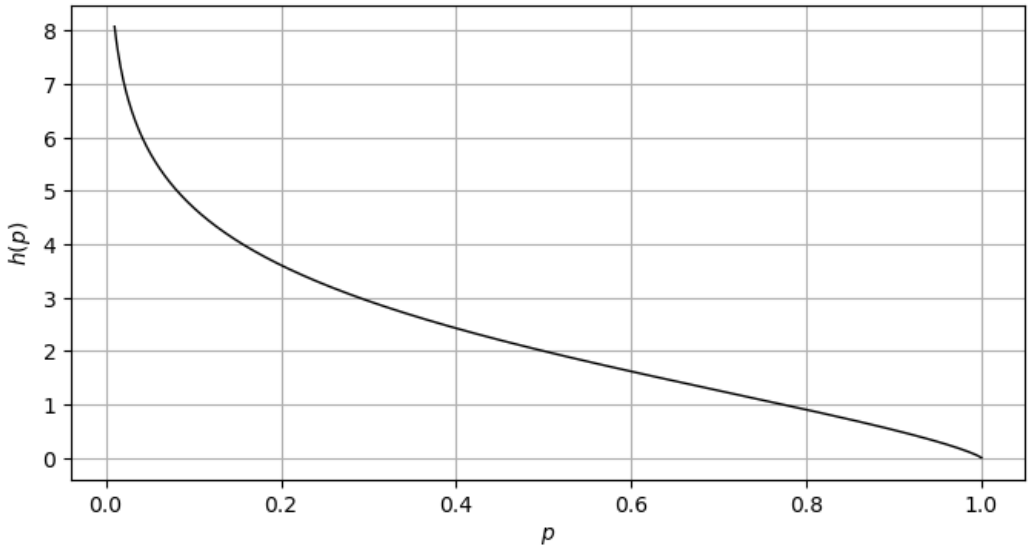

FIGURE 1 – L'entropie de X en fonction de p

2 Absence de mémoire

Proposition 4. *Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{G}(p)$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X > m + n) = \mathbb{P}(X > m)\mathbb{P}(X > n)$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=n+1}^{\infty} q^{k-1} = \frac{pq^n}{1-q} = q^n$$

On en déduit, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > m + n) = q^{m+n} = q^m q^n = \mathbb{P}(X > m)\mathbb{P}(X > n)$$

□

La propriété ci-dessus est appelée « l'absence de mémoire ». Elle est souvent énoncée sous la forme ci-dessous.

Proposition 5. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, on a pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X > m + n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m)$$

Démonstration. Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On a

$$\{X > m + n\} \subseteq \{X > n\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > n) = \frac{\mathbb{P}(X > m+n)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{q^{m+n}}{q^n} = q^m = \mathbb{P}(X > m)$$

□

Il s'avère que la propriété d'absence de mémoire est caractéristique de la loi géométrique.

Proposition 6. *Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire. On suppose que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > m)\mathbb{P}(X > n)$$

Alors, X suit une loi géométrique.

Démonstration. Soient $q = \mathbb{P}(X > 1)$ et $p = 1 - q$. Montrons que $X \sim \mathcal{G}(p)$. En appliquant l'hypothèse avec $m = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1)\mathbb{P}(X > n) = q\mathbb{P}(X > n)$$

La suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison q. De là, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n) = q^n \mathbb{P}(X > 0)$$

Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X > n) = q^n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{X = n\} = \{X > n-1\} \setminus \{X > n\}$$

Le second événement est inclus dans le premier, donc

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n-1) - \mathbb{P}(X > n) = q^{n-1} - q^n = (1-q)q^{n-1} = pq^{n-1}$$

Ainsi, $X \sim \mathcal{G}(p)$. □

3 Loi du premier succès

Soit $\mathcal{S} = (X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur Ω, suivant la loi de Bernoulli de paramètre p (on suppose que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ permet l'existence d'une telle suite). Pour tout $\omega \in \Omega$, soit

$$A(\omega) = \{i \in \mathbb{N}^* : X_i(\omega) = 1\}$$

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ définie par

$$X(\omega) = \min A(\omega)$$

en convenant que $X(\omega) = \infty$ si $A(\omega) = \emptyset$.

Proposition 7. *X est une variable aléatoire.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\{X = n\} = \{X_n = 1\} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \{X_i = 0\}$$

L'ensemble $\{X = n\}$ est une intersection finie d'événements, donc est lui-même un événement. On a aussi

$$\{X = \infty\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_i = 0\}$$

En tant qu'intersection dénombrable d'événements, $\{X = \infty\}$ est aussi un événement. □

Proposition 8. *$X \sim \mathcal{G}(p)$.*

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'indépendance des X_i,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X_n = 1) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0) = pq^{n-1}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = 0\}\right) = q^n$$

Par la continuité de $\mathbb{P}$, lorsque n tend vers l'infini, cette probabilité tend vers

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} \{X_i = 0\}\right) = \mathbb{P}(X = \infty)$$

Comme $0 \leq q < 1$, q^n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'où

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 0$$

La valeur ∞ est donc une valeur exceptionnelle pour X. On a presque sûrement $X \in \mathbb{N}^*$. □

4 Loi du second succès

Reprenons les notations de la section précédente. Pour tout $\omega \in \Omega$, posons

$$B(\omega) = \{i > X(\omega) : X_i(\omega) = 1\}$$

en convenant que $B(\omega) = \emptyset$ si $X(\omega) = \infty$. Soit $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ définie par

$$Z(\omega) = \max B(\omega)$$

en convenant que $Z(\omega) = \infty$ si $B(\omega) = \emptyset$. Remarquons que $\{Z = 1\} = \emptyset$.

Pour tout $n \geq 2$, On a l'union disjointe

$$\{Z = n\} = \bigcup_{k=2}^{n} \{Z = n, X = k\}$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\{Z = n, X = k\} = \{X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1\}$$

De là, par l'indépendance des X_i,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = n, X = k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i) = 0)\right) \mathbb{P}(X_k = 1) \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} \mathbb{P}(X_i = 0)\right) \mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= q^{k-1} p q^{n-k-1} p \\ &= p^2 q^{n-2} \end{aligned}$$

puis, par union disjointe,

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}(Z = n, X = k) = (n-1) p^2 q^{n-2}$$

Comme dans la section précédente, on obtient facilement que $\mathbb{P}(Z = \infty) = 0$.

Proposition 9. *Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p)$. Alors, $X + Y$ et Z ont la même loi.*

Démonstration. Les variables aléatoires Z et $X + Y$ sont toutes les deux à valeurs dans $(\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}) \setminus \{1\}$. Remarquons que

$$\{X + Y = \infty\} = \{X = \infty\} \cup \{Y = \infty\}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(X + Y = \infty) \leq \mathbb{P}(X = \infty) + \mathbb{P}(Y = \infty) = 0$$

d'où $\mathbb{P}(X + Y = \infty) = 0 = \mathbb{P}(Z = \infty)$.

Comme X et Y sont indépendantes, la série génératrice de $X + Y$ est le produit des séries génératrices de X et Y. Rappelons que la série génératrice de X et Y est

$$f(z) = \frac{pz}{1 - qz} = \sum_{n=1}^{\infty} p q^{n-1} z^n$$

de rayon de convergence $R = 1/q$. La série génératrice $g(z)$ de $X + Y$ a donc un rayon de convergence au moins égal à R et pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à R,

$$g(z) = f(z)^2 = \frac{p^2 z^2}{(1 - qz)^2}$$

Rappelons que

$$f'(z) = \frac{p}{(1-qz)^2}$$

On a donc

$$g(z) = pz^2 f'(z)$$

Par dérivation terme à terme,

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} z^{n-1}$$

d'où

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} np^2 q^{n-1} z^{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) p^2 q^{n-2} z^n$$

Par l'unicité des coefficients d'une série entière, on a donc pour tout $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = (n-1)p^2 q^{n-2} = \mathbb{P}(Z=n)$$

□

Le résultat précédent permet d'obtenir immédiatement l'espérance et la variance de Z.

Proposition 10. *$\mathbb{E}(Z) = 2/p$ et $\mathbb{V}(Z) = 2q/p^2$.*