

Nombre moyen d'orbites d'une permutation

Marc Lorenzi

30 mars 2025

Résumé

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ possède entre 1 et n orbites. Ces orbites ont un cardinal compris entre 1 et n . Pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, quel est le « nombre moyen » d'orbites de cardinal ℓ d'une permutation « aléatoire » ?

On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Pour tous $i, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit $X_{i,\ell} : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $X_{i,\ell}(\sigma) = 1$ si i appartient à une orbite de longueur ℓ suivant σ et $X_{i,\ell}(\sigma) = 0$ sinon. Considérons l'événement

$$A_{i,\ell} = \{X_{i,\ell} = 1\}$$

Le cardinal de $A_{i,\ell}$ est le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ telles que i appartienne à une orbite de cardinal ℓ suivant σ . Pour créer une permutation $\sigma \in A_{i,\ell}$,

- On choisit l'orbite $\mathcal{O}$ de σ contenant i . Pour cela, on choisit les $\ell - 1$ points de $\mathcal{O}$ différents de i parmi les $n - 1$ éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$: $\binom{n-1}{\ell-1}$ possibilités.
- On choisit la façon dont $\mathcal{O}$ est parcourue : $(\ell - 1)!$ possibilités.
- On choisit une permutation σ' de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{O}$: $(n - \ell)!$ possibilités.

On a donc

$$\begin{aligned} |A_{i,\ell}| &= \binom{n-1}{\ell-1} (\ell-1)! (n-\ell)! \\ &= \frac{(n-1)!}{(\ell-1)! (n-\ell)!} (\ell-1)! (n-\ell)! \\ &= (n-1)! \end{aligned}$$

Il est remarquable que ce cardinal ne dépend ni de i , ni de ℓ . On en déduit

$$\mathbb{P}(A_{i,\ell}) = \frac{|A_{i,\ell}|}{|\mathfrak{S}_n|} = \frac{1}{n}$$

La variable aléatoire $X_{i,\ell}$ étant une variable de Bernoulli, son espérance est $\mathbb{P}(X_{i,\ell} = 1) = \mathbb{P}(A_{i,\ell})$. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X_{i,\ell}) = \frac{1}{n}$$

Considérons maintenant la variable aléatoire

$$X_\ell = \sum_{i=1}^n X_{i,\ell}$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $X_\ell(\sigma)$ est le nombre d'entiers $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ qui appartiennent à une orbite de cardinal ℓ suivant σ . Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X_\ell) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = 1$$

Posons

$$Y_\ell = \frac{1}{\ell} X_\ell$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $Y_\ell(\sigma)$ est le nombre d'orbites de cardinal ℓ suivant σ . On a, toujours par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y_\ell) = \frac{1}{\ell} \mathbb{E}(X_\ell) = \frac{1}{\ell}$$

Considérons enfin

$$Z = \sum_{\ell=1}^n Y_\ell$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $Z(\sigma)$ est le nombre d'orbites suivant σ . Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{\ell=1}^n \mathbb{E}(Y_\ell) = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} \sim \ln n$$

Ainsi, le « nombre moyen d'orbites » d'une permutation de $\mathfrak{S}_n$ est de l'ordre de $\ln n$.

La figure ci-dessous est une simulation obtenue avec Python à partir de 1000 permutations aléatoires de $\mathfrak{S}_{20}$. Pour chaque entier $\ell \in [1, 20]$, on affiche le nombre moyen d'orbites de longueur ℓ . La courbe est celle de la fonction $x \mapsto 1/x$.

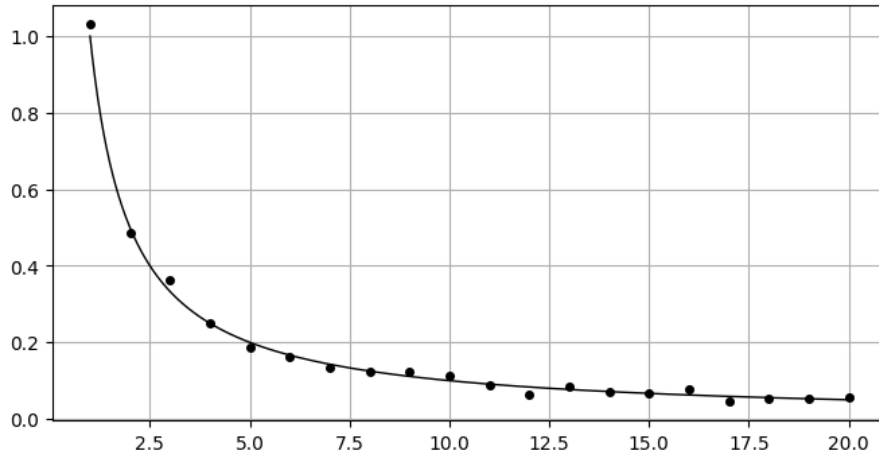


FIGURE 1 – En fonction de ℓ , le « nombre moyen » d'orbites de cardinal ℓ d'une permutation de $\mathfrak{S}_{20}$