

Nombres normaux

Marc Lorenzi

8 août 2024

1 Introduction

Je lance une infinité de fois un dé à 10 faces. J'obtiens

5, 2, 6, 7, 9, 8, 1, 8, 2, 3, 8, 5, 5, 7, 2, 2, 8, 5, 8, 8, 5, 3, 1, 4, 9, 6, 7, 0, 8, 3, 0,
5, 0, 6, 3, 9, 4, 9, 6, 3, 2, 6, 6, 9, 9, 0, 9, 0, 5, 0, 5, 9, 0, 1, 3, 6, 9, 0, 4, 1, 4, 5,
8, 3, 7, 3, 3, 2, 9, 4, 6, 0, 6, 1, 2, 5, 8, 5, 1, 4, 7, 0, 1, 0, 4, 6, 7, 2, 4, 2, 8, 8, 0,
3, 1, 4, 3, 7, 2, 0,...

Avec ces tirages je fabrique un nombre x entre 0 et 1. Voici les 100 premières décimales de x .

$x=0,526798182385572285885314967083050639496326699090505901369041458373$
 $3294606125851470104672428803143720...$

Quelle est la proportion de 0 dans les décimales de x ? La proportion de 1? de 2? ...? de 9? Sauf cas exceptionnel, on peut s'attendre à une proportion de 1/10 pour chaque chiffre. Par exemple, il y a dix « 2 » et neuf « 5 » dans les cent premiers chiffres de x .

De la même façon, les proportions de suites de deux chiffres (00, 01, ..., 99) devraient être 1/100 (avec seulement 100 décimales de notre exemple, on ne peut évidemment pas être convaincu, il en faudrait, disons, 1000).

Et de même pour les suites de trois chiffres (proportion 1/1000), quatre chiffres (proportion 1/10000), etc.

Retenons que lancer un dé à 10 faces une infinité de fois, c'est la même chose que choisir au hasard un nombre entre 0 et 1. Maintenant, ne parlons plus de dés et concentrons nous sur les nombres.

2 Nombres normaux

2.1 Nombres normaux en base 10

Définition 1. Un nombre réel $x \in [0, 1]$ est *normal* (en base 10) si, dans la suite des décimales de x ,

- Les chiffres $0, 1, \dots, 9$ apparaissent avec la même probabilité ($1/10$).
- Les suites de 2 chiffres $00, 01, \dots, 98, 99$ apparaissent avec la même probabilité ($1/100$).
- Les suites de 3 chiffres $000, 001, \dots, 998, 999$ apparaissent avec la même probabilité ($1/1000$).
- Les suites de 4 chiffres $0000, 0001, \dots, 9998, 9999$ apparaissent avec la même probabilité ($1/10000$).
- etc.

Plus généralement, un réel x est normal en base 10 si sa partie fractionnaire $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ est normale en base 10.

Contre-exemples.

- Le nombre $x = 1/3$ n'est pas normal parce que le chiffre 3 apparaît dans les décimales de x avec la probabilité 1 et les autres chiffres avec la probabilité 0. La première condition de la normalité n'est donc pas respectée.
- Le nombre $x = 0,01234567890123456789\dots$ n'est pas normal. bien que tous les chiffres de 0 à 9 apparaissent dans les décimales de x avec la probabilité $1/10$, la suite de deux chiffres 13 n'apparaît pas, et donc apparaît avec la probabilité $0 \neq 1/100$.
- Plus généralement, les nombres rationnels (les fractions) ne sont jamais normaux parce que la suite de leurs décimales est périodique, et donc certaines suites de chiffres n'y apparaissent jamais : si la suite des décimales est de période n , il n'y a que n suites de n chiffres qui apparaissent avec une probabilité non nulle et cette probabilité est $1/n \neq 1/10^n$.

Être normal, cela paraît difficile. cela Existe-t-il des nombres normaux ? Oui !

Proposition 1. *Le nombre de Champernowne*

$$C_{10} = 0,123456789101112131415\dots$$

formé à partir de la suite des entiers naturels (écrits en base 10) est normal en base 10.

Proposition 2. *Le nombre de Copeland-Erdős*

$$E_{10} = 0,23571113171923293137\dots$$

formé à partir de la suite des nombres premiers (écrits en base 10) est normal en base 10.

Le nombre π est-il normal en base 10 ? On ne sait pas... Évidemment, tout mathématicien normal pense que oui.

Le nombre $\sqrt{2}$ est-il normal en base 10 ? On ne sait pas... Même remarque.

A-t-on réussi à prouver qu'un nombre pas complètement artificiel (comme les nombres de Champernowne et de Copeland-Erdős) est normal ? Non.

2.2 Nombres normaux en base b

Plus généralement, si b est un entier supérieur ou égal à 2, on définit le concept de *nombre normal en base b* . C'est la même définition mais on regarde la suite des « décimales » du nombre en base b , qui sont les chiffres $0, 1, \dots, b-1$.

Proposition 3. *Le nombre de Champernowne en base b est normal en base b .*

Proposition 4. *Le nombre de Copeland-Erdős en base b est normal en base b .*

Par exemple, le nombre de Champernowne en base 7 est (en base 7!)

$$C_7 = 0,123456101112131415162021\dots$$

Attention, C_7 n'est pas l'écriture en base 7 de C_{10} , mais un nombre complètement différent. En base 7,

$$C_{10} = 0,060226365514\dots$$

La proposition ci-dessus affirme que C_7 est normal en base 7, *mais pas que C_{10} est normal en base 7*.

3 Nombres normaux

Définition 2. Un nombre est *normal* s'il est normal dans toutes les bases.

Mais au fait, existe-t-il des nombres normaux ? Être normal semble être quelque chose de rare. En réalité c'est exactement le contraire : il n'y a aucune chance d'être anormal.

Proposition 5. *La probabilité qu'un nombre soit normal est égale à 1.*

L'idée de la démonstration est la suivante. On se place dans l'univers $\Omega = [0, 1]$, muni de la tribu $\mathfrak{T}$ des boréliens et de la mesure de Lebesgue $\mathbb{P}$. Pour tout $b \geq 2$, notons $\mathcal{N}_b$ l'ensemble des réels de $[0, 1]$ normaux en base b . En revenant sur les lancers de dés de l'introduction, on peut montrer que pour tout $b \geq 2$, $\mathbb{P}(\mathcal{N}_b) = 1$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des réels de Ω normaux (en toute base). On a

$$\mathcal{N} = \bigcap_{b=2}^{\infty} \mathcal{N}_b$$

Une intersection dénombrable d'ensembles de probabilité 1 est encore de probabilité 1, donc $\mathbb{P}(\mathcal{N}) = 1$.

De façon informelle, si je tire un nombre au hasard, il y a 100% de chances qu'il soit normal. Cela devrait donc être extrêmement facile de trouver des nombres normaux ! Eh bien non. . .

Fait. On ne connaît aucun nombre normal.