

La probabilité qu'une permutation soit un cycle

Marc Lorenzi

1er avril 2025

Donnons nous un entier naturel $n \geq 2$. Munissons le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Notons $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des cycles de $\mathfrak{S}_n$. Quelle est la probabilité de $\mathcal{C}_n$? Quel est un équivalent de cette probabilité lorsque n tend vers l'infini?

1 La valeur de $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Pour construire un cycle γ de longueur k ,

- On choisit son support : $\binom{n}{k}$ possibilités.
- Le cycle γ s'écrit de façon unique $\gamma = (a_1 \ a_2 \dots a_k)$ où a_1 est le plus petit élément du support de γ . Pour terminer de caractériser γ , il suffit de préciser $a_2, \dots, a_k$, c'est à dire de se donner une permutation des $k - 1$ éléments du support autres que a_1 : $(k - 1)!$ possibilités.

On a donc

$$|\mathcal{C}_n| = \sum_{k=2}^n (k-1)! \binom{n}{k} = n! \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k)!k}$$

d'où

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{(n-k)!k}$$

Le changement d'indice $k' = n - k$ donne

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!(n-k)}$$

Remarque. De façon plus rigoureuse, pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, pour tout $A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k , écrivons $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ où $a_1 < \dots < a_k$. Soit $A' = A \setminus \{a_1\}$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}(A')$, soit le cycle

$$\gamma = \varphi(A, \sigma) = (a_1 \ \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$$

On définit ainsi une application $\varphi : E \longrightarrow C_n$ où

$$E = \bigcup_{k=2}^n \bigcup_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} \{A\} \times \mathfrak{S}(A')$$

L'application φ est une bijection : soit $\gamma \in C_n$ un cycle de longueur $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Soit $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ le support de γ , où $a_1 < \dots < a_k$. Le cycle γ s'écrit de façon unique $\gamma = (a_1 \sigma(a_2) \dots \sigma(a_k))$ où $\sigma \in (A \setminus \{a_1\})$. On a alors $\varphi^{-1}(\gamma) = (A, \sigma)$.

Par la bijectivité de φ et le fait que les réunions qui définissent E sont disjointes,

$$\begin{aligned} |C_n| &= |E| \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} |\{A\}| \times |\mathfrak{S}(A')| \\ &= \sum_{k=2}^n \sum_{A \in \mathcal{P}_k(\llbracket 1, n \rrbracket)} (k-1)! \\ &= \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} (k-1)! \end{aligned}$$

2 Le réel e

La série de terme général $1/k!$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit e_n la n^{e} somme partielle de la série :

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers e . Comme cette suite est croissante, $e_n \leq e$. De plus, pour tout $n \geq 1$,

$$e - e_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2) \dots k}$$

Remarquons que

$$\prod_{j=n+2}^k j \geq \prod_{j=n+2}^k (n+1) = (n+1)^{k-n-1}$$

De là,

$$\begin{aligned}
e - e_n &\leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n-1}} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} \\
&= \frac{1}{n!n}
\end{aligned}$$

3 Minoration

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $2 \leq n-k \leq n$. De là,

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} = \frac{e_{n-2}}{n}$$

4 Majoration

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels qui tend vers $+\infty$ et telle que $u_n = o(n)$. Écrivons

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) = \sum_{k=0}^{u_n} \frac{1}{k!(n-k)} + \sum_{k=u_n+1}^{n-2} \frac{1}{k!(n-k)} = S_n + S'_n$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, u_n \rrbracket$, $n-k \geq n-u_n$. On a donc

$$S_n \leq \frac{1}{n-u_n} \sum_{k=0}^{u_n} \frac{1}{k!} = \frac{e_{u_n}}{n-u_n}$$

Pour tout $k \in \llbracket u_n+1, n-2 \rrbracket$, $n-k \geq 1$, d'où

$$0 \leq S'_n \leq \sum_{k=u_n+1}^{n-2} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=u_n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - e_{u_n} \leq \frac{1}{u_n!u_n}$$

Choisissons maintenant u_n de sorte que $n = o(u_n!)$. On peut par exemple prendre $u_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. En effet, pour tout $n \geq 9$, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \geq 3$ et donc

$$\begin{aligned}
u_n! &\geq u_n(u_n-1)(u_n-2) \\
&\geq (\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}-2)(\sqrt{n}-3) \\
&\sim n^{3/2}
\end{aligned}$$

On a ainsi $S'_n = o(1/n)$. De là,

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \frac{e_{u_n}}{n - u_n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Remarque. Le choix de u_n est sans importance, pourvu que l'on ait $u_n = o(n)$ et $n = o(u_n!)$. Dit autrement, il suffit que u_n soit négligeable devant n , mais quand même « pas trop négligeable ».

Prenons $u_n = \lfloor \ln n / (\ln \ln n)^\alpha \rfloor$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Stirling, on peut avec quelques calculs montrer que si $\alpha \geq 1$ alors $u_n! = o(n)$. En revanche, si $\alpha < 1$, alors $n = o(u_n!)$.

5 Équivalent

On a

$$\frac{e}{n} \sim \frac{e_{n-2}}{n} \leq \mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \leq \frac{e_{u_n}}{n - u_n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{e}{n}$$

La probabilité $\mathbb{P}(\mathcal{C}_n)$ est encadrée par deux suites équivalentes à e/n . Ainsi,

$$\mathbb{P}(\mathcal{C}_n) \sim \frac{e}{n}$$